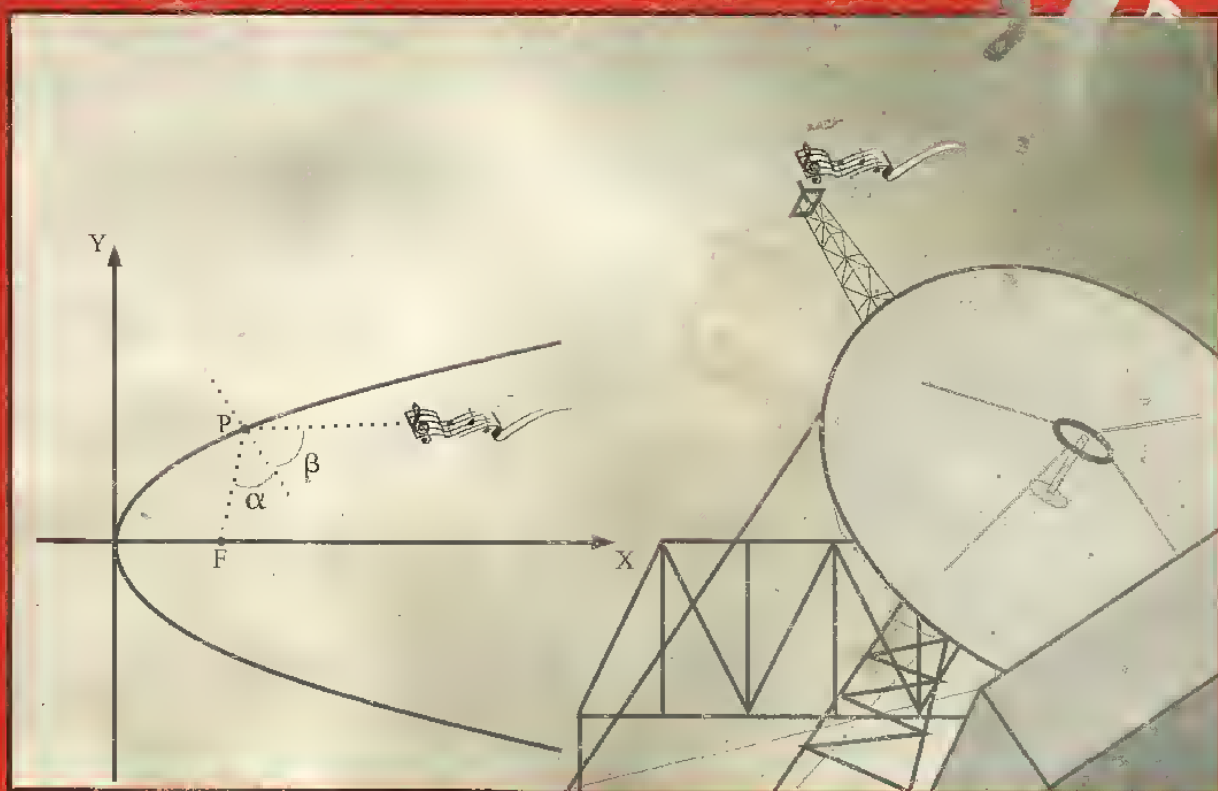


CÁLCULO I



CARLOS GUERREIRO



Universidad Central de Venezuela
Ediciones de la Biblioteca Central

P R E F A C I O

Elevación. Todo hombre de elevado espíritu procurará dejar muestras de su paso material por la Tierra, algunas muy naturales, como lo es el impulso de la procreación. Le siguen las huellas derivadas de las actividades de subsistencia, por ejemplo, el campesino dejará los surcos de sus sembradíos impresos en los campos que sirvieron de hogar a su parte corpórea, hasta que sus descendientes reemplacen ese legado por otro, tal vez con modificaciones propias de la inteligencia humana. La búsqueda de rastros imborrables persiguen al hombre de intelecto; muchos han logrado obras tanto hermosas como útiles, y muchos en el futuro lo conseguirán. *Decía Horacio, poeta latino (65-8 a.c.): "Yo no moriré del todo, pues mi obra me sobrevivirá."*

Desde la humilde posición de profesor es mucho lo que se puede contribuir, al menos a nivel motivacional y también de formación, a que algún discípulo construya una obra imperecedera en el tiempo histórico. Que así sea.

Descenso. Si bien, la anterior es la aspiración extrema del docente, no es menos importante y gratificante las estigmas inducidas por el profesor en la formación personal, humana y profesional de la juventud, principalmente la universitaria que inicia la construcción de la base para un camino de luz y grandeza en el servicio a la sociedad, en sus múltiples aspectos. A todos ellos, maestros y discípulos, les dedico la famosa frase:

"Dadme un punto de apoyo y levantaré la Tierra",

que históricamente es debida a Arquímedes, aunque sin fundamento histórico seguro. Más allá de su connotación física, es lo suficientemente sugestiva y denota la fe de todos los hombres, como él, capaces de tareas sobrehumanas.

Arquímedes:



Matemático, físico, químico, y el mayor ingeniero de la antigüedad, en el sentido más amplio de quien construye la teoría.

Se sabe que fue muerto por un soldado durante la ocupación de Siracusa en el año 212 a.c., por las tropas romanas del cónsul M. Claudio Marcelo, al parecer, a la edad de setenta y cinco años. Plutarco describe la escena de su muerte:

(...) "De repente, entró en la habitación un soldado y le ordenó que lo acompañase a ver a Marcelo. Arquímedes respondió que iría después de haber resuelto el problema y puesto en orden la demostración. El soldado se enojó, desenvainó la espada y lo mató."

Vayamos al libro. Este libro va dirigido al dictado de las matemáticas en el primer semestre de las carreras universitarias que las tienen como una de sus herramientas, aunque el mismo también es útil para la propia carrera de matemáticas por la diversidad de ejemplos, aunque están dirigidos, primordialmente, al uso de la teoría para resolver problemas de cálculo y aplicaciones.

Innumerables razones académicas en la enseñanza de las matemáticas, en una Facultad de Ingeniería de primer nivel, me indujeron a escribir este libro, sin embargo, me referiré solamente a dos que me parecen importantes:

1) Los textos existentes en el mercado no guardan relación de contenidos, en cuanto al orden, con los programas más recientes de la Facultad de Ingeniería-UCV; y, aunque ello se podría soslayar, son factores aditivos que entorpecen el aprendizaje del estudiantado.

2) Los textos foráneos existentes en nuestro mercado, los divido, según mi criterio, en dos categorías. Una, en que la ejemplificación y ejercicios propuestos no alcanzan, a excepción de aplicaciones de la derivada, los niveles que considero aceptables e indicadores de un buen aprendizaje. Es común, la presentación de ejemplos donde no aparece una sola palabra o frase explicativa de los procesos o del porqué de ellos. En contraposición, están los textos de alto nivel, propios para estudiantes de matemáticas puras, en los cuales es lógico que el carácter constructivo, la

minuciosa deducción y el formalismo se lleven al más alto nivel. En éstos últimos la ejemplificación es pobre en cuanto a cantidad.

Pretendí escribir un libro de características intermedias donde no se dejaran de justificar los procedimientos, pero sin llegar al formalismo extremo y, sobre todo, dar las explicaciones del origen de lo que para el estudiantado de ingeniería es una herramienta más. En general, se ha buscado la claridad comprensiva de los procesos en lugar de la brevedad, y lo perdido en elegancia deductiva se gana en sencillez. No hay prejuicio en presentar las recetas que se requieran, así como las meras aplicaciones de fórmulas, sin embargo, los ejercicios van acompañados de justificaciones y aclaratorias, y cuando se presentan alternativas, se procura enumerar las ventajas de algún procedimiento. Se persigue que los ejemplos sean variados, ilustrativos de las posibles dificultades de cálculo y, sobre todo, que vayan más allá de los ejercicios triviales.

En esta segunda edición incluyo un apéndice para el programa computacional de cálculo Maple. La selección de Maple y no otro programa de cálculo obedece a su pertinencia pedagógica y primordialmente al hecho de que este programa presenta las respuestas usando Cálculo Simbólico (por ejemplo, un racional lo presenta como cociente entre dos enteros).

Por otro lado, es una tendencia casi universal incluir este tipo de programas en los textos de matemáticas, sin embargo, considero oportuno enfatizar que el objetivo del libro desde el punto de vista de cálculo es proporcionar al estudiantado ejemplos y ejercitación, a un nivel adecuado, para una carrera de ingeniería en la cual sigue siendo importante la agilidad en la realización de "cálculos a mano". En el sentido anterior, el estudiante debe usar Maple solamente para corroborar, comparar o complementar sus cálculos, gráficos, etc.

La historia. En muchas oportunidades, el estudiante no logra una respuesta adecuada a preguntas muy naturales como son: ¿para qué estudio esto?, ¿para qué sirve? En mi opinión, la historia, además de ser un fundamento importante no sólo desde el punto de vista del conocimiento, sino también como incentivo y motivación para un mejor rendimiento estudiantil, cumple con el objetivo de dar una explicación veraz de dónde surgen los diferentes tópicos de las matemáticas y, muchas veces, presenta la parte de construcción inmersa. Por ello, se incluye, al principio de los capítulos, introducciones históricas de los conceptos inherentes y sus más destacados protagonistas. Los comentarios son un poco más extensos que lo usual en otros libros de cálculo, porque se pretende mostrar y enfatizar, a través de la historia, el enlace entre las ciencias físicas o la ingeniería, como descriptores del mundo cotidiano que nos rodea, y del desarrollo de las matemáticas.

Apéndice de demostraciones. Más allá de la intuición natural que posee toda persona, el recién ingresado a la Universidad carece de la experiencia necesaria para comprender los procedimientos lógicos, propios de las demostraciones de teoremas y corolarios, ya que no ha tenido en bachillerato instrucción en lógica. Por ello, juzgo conveniente no presentar, como es usual, la demostración inmediatamente después del enunciado, con excepción en los tópicos donde las demostraciones son de carácter geométrico y la intuición natural, tal vez, sea suficiente para comprender las pruebas, como por ejemplo, en el capítulo de rectas y circunferencias. Pienso que de esta forma la lectura del libro será más agradable y fácil de entender por los estudiantes. En general, las demostraciones se encuentran en un apéndice al final del libro.

No obstante lo anterior, considero que incumbe al profesor enfatizar que tanto el ingeniero como el científico sólo podrán usar a cabalidad la herramienta matemática cuando dominen con eficiencia los alcances y limitaciones de los instrumentos matemáticos, conociendo sus facetas teóricas. Un buen ejemplo de ello, podría ser, usar el método de Newton y una computadora para calcular las raíces de una ecuación.

Agradecimiento. Mi reconocimiento a todos los estudiantes y colegas que contribuyeron a consolidar mi convicción de que tanto institucional como personalmente se deben hacer grandes esfuerzos para tener materiales de apoyo docente acordes con nuestros programas y necesidades didácticas. También, agradezco a los mismos las observaciones al escrito, muy especialmente, a la profesora Mariemma Sánchez las sugerencias hechas en todos los órdenes de elaboración de este libro. A los profesores que usan la obra como referencia base para el dictado de Cálculo I, mis más expresivas gracias.

El Autor.

CONTENIDOS

PREFACIO



1 LA RECTA REAL. INECUACIONES

Números naturales, enteros, racionales e irracionales.	1
Identificación entre números y puntos de una recta. Definición de $x < y$.	2
Propiedades de las desigualdades.	3
Inecuaciones. Distancia entre dos puntos de la recta real.	3
Definición de valor absoluto. Propiedades de la distancia (valor absoluto).	4
Ejercicios resueltos.	4
Ejercicios para ser resueltos por el estudiante.	15
Respuestas a los ejercicios impares.	16

2 RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

Breve reseña histórica.	19
Sistema de coordenadas rectangulares. Distancia en el plano.	21
Coordenadas del punto medio. Definición de recta.	22
Ángulo de inclinación. Pendiente. Ecuaciones de la recta. Rectas paralelas.	23
Rectas perpendiculares. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.	24
Ángulo entre dos rectas. Distancia de un punto a una recta.	25
Distancia entre dos rectas paralelas. Bisectrices. Área de un triángulo	26
Circunferencia. Ecuación de la circunferencia.	27
Ejercicios resueltos.	28
Ejercicios para ser resueltos por el estudiante.	35
Respuestas a los ejercicios impares.	38

3 FUNCIONES Y SUS GRÁFICOS

Definición de función. Igualdad y álgebra de funciones.	39
Sucesiones. Paridad e imparidad. Función periódica.	40
Función creciente y decreciente. Composición de funciones.	41
Función inyectiva. Función inversa.	42
Función exponencial.	43
Propiedades de la función exponencial.	44
Función logarítmica. Propiedades. Funciones hiperbólicas.	44
Identidades hiperbólicas. Traslaciones y reflexiones. Función implícita.	45
Funciones paramétricas.	46
Gráficos de funciones elementales.	47
Ejercicios resueltos.	53
Ejercicios para ser resueltos por el estudiante.	71
Respuestas a los ejercicios impares.	76

4 LÍMITES Y CONTINUIDAD

Breves notas históricas de la concepción de límite y otros.	81
Pasemos de la historia a la idea geométrica de límite.	88
Definición de límite. Álgebra de límites.	90
Límites laterales. Teorema del Sandwich. Límite notable $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.	91
Límites infinitos. Límites en el infinito. Límite de una sucesión.	92

Propiedades de límites infinitos. Indeterminaciones. Límite notable $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.	93
Definición de continuidad.	93
Teorema de los valores intermedios. Teorema de los valores extremos.	94
Método de bisección.	94
Ejercicios resueltos.	95
Ejercicios para ser resueltos por el estudiante.	111
Respuestas a los ejercicios impares.	115

5 DERIVADAS

Pendiente de la recta tangente. Definición de derivada.	117
Ecuación de la recta tangente. Interpretación física de la derivada. Derivadas laterales.	118
Álgebra de derivadas. Regla de la cadena.	119
Derivación implícita. Derivada de la función inversa. Derivadas de orden superior.	120
Interpretación física de la segunda derivada. Derivación paramétrica.	121
Tabla de derivadas. Ejercicios resueltos.	122
Ejercicios para ser resueltos por el estudiante.	132
Respuestas a los ejercicios impares.	136

6 APLICACIONES

Un problema de tiempo mínimo.	139
Definiciones de máximo y mínimo.	139
Número crítico. Teoremas de Rolle y Valor Medio.	140
Teorema del Valor Medio Generalizado. Regla de L'Hôpital.	141
Criterio de la primera derivada para crecimiento y decrecimiento.	141
Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos. Concavidad.	142
Criterio de la segunda derivada para concavidad. Punto de inflexión.	143
Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos. Método de Newton.	143
Asintotas al gráfico de una función.	144
Trazado de curvas.	145
Problemas de optimización. Diferenciales.	146
Ejercicios resueltos.	148
Ejercicios para ser resueltos por el estudiante.	173
Respuestas a los ejercicios impares.	181

APÉNDICES

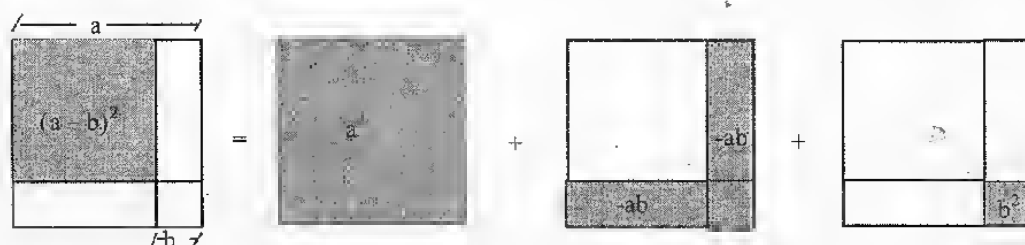
A Secciones cónicas:	
Lugar geométrico. Parábola.	185
Elipse.	186
Hipérbola.	187
Excentricidad. Traslación de ejes.	188
Ecuación general de 2º grado.	189
Rotación de ejes.	192
Ejercicios resueltos.	193
Ejercicios para ser resueltos por el estudiante.	194
Respuestas a los ejercicios impares.	198
	200
B Demostraciones.	201
C Cálculo con Maple	213
D Identidades trigonométricas.	230

E	Fórmulas en geometría.	231
F	Álgebra.	231

BIBLIOGRAFÍA	233
ÍNDICE	235

1 LA RECTA REAL . INECUACIONES

Leopold Kronecker (1823-1891) matemático alemán del siglo XIX dijo alguna vez que “ los enteros son la obra de Dios y todos los otros tipos de números son obra del hombre”. Es verdad indiscutible que los enteros positivos son algo natural , sin embargo, según algunos autores, durante miles de años, el hombre se limitó a definir como “muchos” cualquier cantidad mayor de tres, y la idea de asignar a estas cantidades simbolos le costó al hombre varios siglos de ensayos, sobre todo, porque el hombre tenía que adaptar la simbología a las operaciones algebraicas que iba generando y darles coherencia. El origen de los simbolos y aritmética actuales es hindú, que pasaron a los árabes debido a las relaciones comerciales habidas entre estos dos pueblos aproximadamente por el siglo VII y VIII; los Árabes perfeccionaron los aportes hindúes y los introdujeron en Europa en su expansión colonizadora. Los enteros negativos fueron manejados por los griegos en expresiones relacionadas con el cálculo de áreas:



Pero los números negativos solamente fueron incorporados totalmente al cuerpo de las matemáticas por Girolamo Cardano, en 1545.

Los **números racionales** (fracciones) aparecen en textos primitivos y fueron extensamente discutidos en el año 1550 a. C. en el papiro del Rhind de Egipto, aunque su simbología $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ y aritmética actuales son del siglo XV y XVI. Los **definimos** como cociente entre dos enteros, $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$, y cuando están escritos en forma decimal, se reconocen por tener una parte decimal periódica, es decir, que se repite a partir de un determinado lugar:

$$\frac{1}{2} = 0.5000...$$

$$\frac{1}{3} = 0.333333...$$

$$\frac{6}{7} = 0.857142857142...$$

$$\frac{7}{24} = 0.291666...$$

Los **números irracionales**, que podemos definir como aquellos cuya representación decimal no tiene una parte decimal periódica, como por ejemplo:

$$\sqrt{6} = 2.449489742...$$

$$1 + \sqrt{6} = 3.449489742...$$

$$\pi = 3.141592653...$$

$$e = 2.7182818245...;$$

también tienen una larga historia:

“ Hace unos 6000 años, algún ciudadano desconocido de la antigua Mesopotamia llevó a cabo una de las mayores invenciones de todos los tiempos: la rueda”.¹

Los problemas relacionados con la longitud de la rueda dieron origen a una aproximación del número que hoy día conocemos con la letra griega π (pi), para los mesopotámicos fue 3,0 y los egipcios estimaron que la longitud de la circunferencia era 3,14 veces mayor que su diámetro. Hacia el año 500 d. C. Aryabhata, matemático hindú, dio el valor de 3,1416. Finalmente, en 1761, el matemático, alemán J.H. Lambert (1728-1777) demostró que π es un número irracional.

En un triángulo con catetos de longitud 1, la hipotenusa tendría que ser $\sqrt{2}$ (irracional). La escuela de Pitágoras, en el siglo VI a.C., se encontró con este número que no podía ser encasillado en la categoría de los enteros ni era un

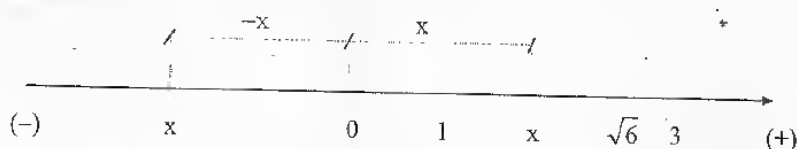
¹ Copiado textualmente de El mundo maravilloso de las matemáticas por Lancelot Hogben

entero más una fracción de la forma $\frac{a}{b}$, por lo tanto, para ellos no era un número. Los griegos resolvieron este problema creando una geometría que establecía teoremas y demostraciones rigurosas sin referencia alguna al número.

Sin duda, el invento de la rueda fue un gran salto en el bienestar de la humanidad, sin embargo, existen otros hechos que bien podrían competir con la rueda para calificar como el mayor invento del hombre. Uno de ellos, tiene nombre y padre, se debe al científico francés René Descartes (1596-1650):

Identificar cada número real con un único punto sobre una recta y recíprocamente a cada punto le corresponde un solo número.

Esto se hace eligiendo una recta donde se marca un punto llamado **origen**, al cual le corresponderá el número cero, la semirecta a la derecha se llama **dirección positiva** y la semirecta a la izquierda **dirección negativa**. Se selecciona una medida patrón como unidad de longitud y se le asigna a un número **x positivo** un punto a x unidades del origen en la dirección positiva, a un número **x negativo** se le asigna un punto a $-x$ unidades del origen en la dirección negativa:



Resulta que, presentar la rueda como el gran invento del hombre, es fácilmente entendible por la gran masa popular y para percibir las repercusiones de esta "geometrización de los números" hace falta tener un grado más elevado de conocimientos y de cultura científica que el común. Tal vez, si no fuera por esta ocurrencia de Descartes, seguiríamos, hoy día, viajando en carreta.

Con esta correspondencia entre números y puntos de la recta, Descartes introduce el sistema de coordenadas rectangulares, también conocido como cartesiano en su honor, con ello, logra describir curvas (tales como la recta, parábola, elipse, etc., tratadas por los griegos con rigor puramente geométrico) mediante ecuaciones algebraicas y que se ha dado en llamar la **algebrización**² de la geometría. Las consecuencias no se hicieron esperar y los físicos de la época utilizaron esta nueva técnica para estudiar la trayectoria de cuerpos celestes, el movimiento de proyectiles, exploración geográfica, etc.

Regresemos a la idea de Descartes y observemos la facilidad con que se entiende la relación algebraica y $> x$:

el punto que le corresponde a y está a la derecha del punto asignado a x ;



a partir de esta representación, se puede modelar matemáticamente el concepto de distancia sobre una recta, área, volumen, etc. El camino hacia el progreso estaba despejado.

1.1 Definición

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Se dice que x es menor que y (lo cual se denota $x < y$) si y sólo si $y - x > 0$. En tal caso también se dice que y es mayor que x (lo cual se denota por $y > x$). Relaciones como las anteriores, entre números reales, se llaman **desigualdades**.

1.2 Propiedades de las desigualdades

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Entonces:

a) Una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

² Término sugerido, enhorabuena, por el Dr. Guillermo Miranda

i) $x = y$, ii) $x < y$, iii) $y < x$.	(Ley de Tricotomía)
b) $x < y, y < z \Rightarrow x < z$	(Transitividad)
c) $x < y \Rightarrow x+z < y+z$	(Monotonía)
d) $x < y, 0 < z \Rightarrow xz < yz$	(Monotonía)
e) $x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz$	(Antimonotonía)

Convenios

La proposición compuesta " $x < y$ o bien $x = y$ " se denota por $x \leq y$, y se lee x es menor igual que y .

La proposición compuesta " $x > y$ o bien $x = y$ " se denota por $x \geq y$, y se lee x es mayor igual que y .

La proposición compuesta " $x \leq y$ y además $y \leq z$ " se denota por $x \leq y \leq z$.

1.3 Inecuaciones y conjunto solución

Si en las desigualdades aparece alguna **variable**, es decir, una incógnita que puede tomar varios valores, entonces la desigualdad recibe el nombre de **inecuación**.

Llamamos **conjunto solución** al conjunto de todos aquellos valores reales de x que una vez sustituido en la desigualdad la hacen verdadera (la satisfacen).

1.4 Definiciones

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$.

- a) El intervalo abierto de extremos a y b es el conjunto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
- b) El intervalo cerrado de extremos a y b es el conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
- c) El intervalo semi-abierto por la izquierda (semi-cerrado por la derecha) de extremos a y b es el conjunto $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$
- d) El intervalo semi-cerrado por la izquierda (semi-abierto por la derecha) de extremos a y b es el conjunto $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

Convenios

$\{x \in \mathbb{R} / a < x\}$	se denota por $(a, +\infty)$
$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$	se denota por $[a, +\infty)$
$\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	se denota por $(-\infty, a]$
$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	se denota por $(-\infty, a)$

Nota:

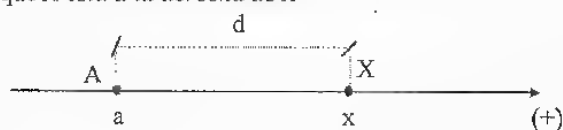
$+\infty$ no es un número, sino solamente una notación para expresar todos los valores que están a la derecha de cualquier número dado, ($-\infty$ a la izquierda). Para los antiguos, el concepto de infinito consistía en un acto supremo de la imaginación, porque iba más allá de la opinión filosófica de que el universo es finito. Los griegos dieron el primer salto en esta dirección colocando tres puntos suspensivos después de un número para indicar que después de éste viene otro, y después otro, ...

1.5 Distancia entre dos puntos de la recta real

Sin duda que una de las preocupaciones primarias del hombre es la distancia; una vez introducida la correspondencia entre números y puntos de una recta, surgen las desigualdades y con ellas la posibilidad de modelar matemáticamente este concepto.

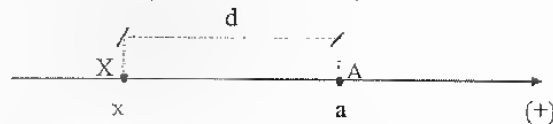
Sean A y X dos puntos sobre una recta a los cuales les corresponde los números a y x , respectivamente. La **distancia entre A y X** viene dada por la longitud del segmento que los une:

Supongamos primero que X está a la derecha de A



Por lo tanto, $d = x - a$.

Supongamos ahora que X está a la izquierda de A .



ahora $d = a - x = -(x - a)$.

Como era de esperar, en ambos casos se tiene que $d > 0$. Se crea una notación para distancia que resume los dos casos:

$$d(A; X) = \begin{cases} x - a & \text{si } x > a & (x \text{ a la derecha de } a) \\ -(x - a) & \text{si } x < a & (x \text{ a la izquierda de } a) \end{cases} = |x - a|$$

donde la simbología $| \cdot |$ se lee **valor absoluto o módulo**.

Si A es el origen 0 , tenemos

$$d(X; 0) = |x|$$

que geoméricamente, enfatizamos, es la distancia del punto X al origen. Presentamos los hechos geométricos anteriores (X a la derecha o X a la izquierda del origen) de la siguiente forma:

1.6 Definición de valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Las propiedades que siguen son una consecuencia directa de la magnitud física modelada por el valor absoluto.

1.7 Propiedades de la distancia (valor absoluto)

- a) $|x| = |-x|$
- b) $|xy| = |x||y|$
- c) $|x| = a \Leftrightarrow x = a \quad \text{ó} \quad x = -a \quad \text{con } a \geq 0$
- d) $-|x| \leq x \leq |x|$
- e) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad \text{con } a \geq 0$
- f) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \quad \text{ó} \quad x \leq -a \quad \text{con } a \geq 0$
- g) $|x+y| \leq |x|+|y|$
(desigualdad triangular)
- h) $||x|-|y|| \leq |x-y|$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.1.- Demostrar b) y c) de las propiedades de las desigualdades.

b) $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ (Transitividad)

Por definición se tiene, $x < y$ si y sólo si $y - x > 0$, a su vez $y < z$ si y sólo si $z - y > 0$.

La suma de números positivos es positivo, por lo tanto $(y - x) + (z - y) > 0$, entonces $z - x > 0$, es decir, $x < z$.



c) $x < y \Rightarrow x+z < y+z$

(Monotonía)

 $x < y$ si y sólo si $y - x > 0$, o bien $(y - x) + 0 > 0$, aún equivalente a $(y - x) + (z - z) > 0$ para cualquier número real z , luego reagrupando (comutatividad de la suma) se tiene $(y + z) - (x + z) > 0$, de donde $x + z < y + z$.



1.2.- Demostrar que si $0 < x < y$ entonces $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

 Como x e y son positivos también lo es $\frac{1}{xy}$. Por la propiedad d) de las desigualdades se tiene que $0 < x \cdot \frac{1}{xy} < y \cdot \frac{1}{xy}$ de donde $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Otra forma:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y - x}{xy} > 0 \quad \text{por ser } 0 < x < y.$$



1.3 Demostrar que si $0 < x < y$ entonces $x^2 < y^2$.

 Como x e y son positivos se tiene $x \cdot x < y \cdot x$ y $x \cdot y < y \cdot y$, o bien $x^2 < x \cdot y$ y $x \cdot y < y^2$, luego por transitividad resulta $x^2 < y^2$.



1.4 Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $-3x+5 > 0$

 Se debe despejar x , tomando en cuenta que el procedimiento no siempre es similar al usado para ecuaciones:

$$-3x+5 > 0 \Leftrightarrow -3x > -5 \Leftrightarrow x > \frac{-5}{-3} \Leftrightarrow x > \frac{5}{3} \quad \text{Procedimiento incorrecto, ¿cuál es el paso que viola la propiedad e) de las desigualdades?}$$

$$-3x+5 > 0 \Leftrightarrow -3x > -5 \Leftrightarrow 3x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3} \quad \text{Procedimiento correcto.}$$



Indicaciones para resolver inecuaciones

Existen muchas formas de resolver inecuaciones. Cuando las inecuaciones involucran productos, cocientes o bien polinomios de grado superior a uno, los pasos que seguimos en este libro son básicamente los siguientes:

* **Comparar con cero**

** **Factorizar las expresiones lo más posible.**

*** **Calcular los ceros de cada factor**

**** **Hacer una tabla de signos.**

Este método, muy sistemático, tiene su base en que el signo de cada factor se mantiene en cada intervalo. La justificación de ello se verá cuando abordemos la continuidad de funciones. Por lo anterior, para conocer el signo de un factor en un determinado intervalo, es suficiente chequear su signo en un punto cualquiera del intervalo.

b) $x^2 - x - 2 \leq 0$ (Inecuación de segundo grado)

En este caso, ya la expresión está comparada con cero.

$x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \leq 0$, \leftarrow factorización
 la expresión es igual a cero si $x = 2$ ó $x = -1$ \leftarrow ceros

Intervalo	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$		-	+	+
$x-2$		-	-	+
$(x-2)(x+1)$		+	-	+

Los valores -1 y 2 son parte de la solución, ya que para ellos la parte izquierda se hace igual a cero, por lo tanto, la solución es $[-1, 2]$.

Observe que a la vez podemos dar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - x - 2 \geq 0$, que es el intervalo $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

También tenemos de inmediato las soluciones de $-(x^2 - x - 2) \leq 0$ y $-(x^2 - x - 2) \geq 0$ multiplicando los signos de la última fila de la tabla por -1 :

	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-(x-2)(x+1)$		-	+	-

Por lo tanto, la solución de $-(x^2 - x - 2) \leq 0$ es $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$; y la solución de $-(x^2 - x - 2) \geq 0$ es $[-1, 2]$. ☑

1.5 Hallar la solución de $\frac{4-x}{x-3} \geq 2x$

• Comparación con cero:

$$\begin{aligned} \frac{4-x}{x-3} \geq 2x &\Leftrightarrow \frac{4-x}{x-3} - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4-x-2x(x-3)}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+5x+4}{x-3} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2(x^2 - \frac{5}{2}x - 2)}{x-3} \geq 0 \end{aligned}$$

• El numerador tiene como raíces:

$$x_1 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4} \approx -0.64, \quad x_2 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4} \approx 3.14, \quad \text{y la raíz del denominador es } 3.$$

• Factorización:

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x-x_1)(x-x_2)}{x-3} \geq 0$$

• Tabla de signos:

Intervalo	$-\infty$	x_1	3	x_2	$+\infty$
$x-x_1$		-	+	+	+
$x-x_2$		-	-	-	+
$x-3$		-	-	+	+
$\frac{-2(x-x_1)(x-x_2)}{x-3}$		+	-	+	-

Recuerde que -2 es un factor. Las raíces del numerador x_1 y x_2 son soluciones; en cambio 3 , raíz del denominador no es solución.

Solución de la inecuación: $(-\infty, x_1] \cup (3, x_2]$. ☑

• **Nota y otra forma de resolución**

Es posible que a estas alturas usted esté pensando en que es mucho más fácil hacer lo siguiente:

$$\frac{4-x}{x-3} \geq 2x \Leftrightarrow 4-x \geq 2x(x-3)$$

sin embargo, está incurriendo en un error porque el término $(x-3)$, a priori, puede ser tanto positivo como negativo. ¿Cómo se debe proceder?

i) $\frac{4-x}{x-3} \geq 2x \Leftrightarrow 4-x \geq 2x(x-3)$ si $x-3 > 0$ (ésta es la condición bajo la cual las inecuaciones son equivalentes)

$4-x \geq 2x(x-3) \Leftrightarrow 4-x \geq 2x^2-6x \Leftrightarrow 2x^2-5x-4 \leq 0$, cuyas raíces son x_1 y x_2 (los mismos valores hallados anteriormente); con éstas tenemos la recta real dividida en tres intervalos, en los cuales la inecuación anterior mantiene su signo y para conocerlo es suficiente evaluar en un punto cualquiera de cada intervalo; el signo obtenido en dicho punto es válido para todo el intervalo.

Intervalo	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$2x^2-5x-4$		+	-	+

Por lo tanto, la solución de i) es $[x_1, x_2] \cap (3, +\infty) = (3, x_2]$.

ii) $\frac{4-x}{x-3} \geq 2x \Leftrightarrow 4-x \leq 2x(x-3)$ si $x-3 < 0$ (ésta es la condición)

$4-x \leq 2x(x-3) \Leftrightarrow 2x^2-5x-4 \geq 0$ cuya solución es $(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$, véase la tabla anterior de signos.

La solución de ii) es $((-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)) \cap (-\infty, 3) = (-\infty, x_1]$. Por último, la solución de la inecuación original es la **unión** de las soluciones de i) y de ii), es decir: $(-\infty, x_1] \cup (3, x_2]$.



1.6 Resolver $-2 \leq \frac{2+7x}{5-2x} < 5$

La solución de la inecuación es el conjunto de los valores para x que satisfacen **a la vez** las siguientes dos inecuaciones:

a) $\frac{2+7x}{5-2x} < 5$

b) $\frac{2+7x}{5-2x} \geq -2$

es decir, se debe resolver cada una de ellas por separado y luego intersectar los intervalos solución.

Resolución de a):

• Comparación con cero: $\frac{2+7x}{5-2x} < 5 \Leftrightarrow \frac{2+7x}{5-2x} - 5 < 0 \Leftrightarrow \frac{17x-23}{5-2x} < 0$

• Ceros: $x = \frac{23}{17}$ y $x = \frac{5}{2}$

• Tabla de signos:

Intervalos	$-\infty$	$23/17$	$5/2$	$+\infty$
$17x-23$		-	+	+
$5-2x$		+	+	-
$\frac{17x-23}{5-2x}$		-	+	-

Solución de a): $(-\infty, \frac{23}{17}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$.

Resolución de b):

• Comparación con cero: $\frac{2+7x}{5-2x} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{2+7x}{5-2x} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+12}{5-2x} \geq 0$

• Ceros: $x = -4$ y $x = \frac{5}{2}$

• Tabla de signos:

Intervalo	$-\infty$	-4	$5/2$	$+\infty$
$3x+12$		-	+	+
$5-2x$		+	+	-
$\frac{3x+12}{5-2x}$		-	+	-

La solución de b) es : $[-4, \frac{5}{2})$

La solución de la inecuación planteada es la intersección de las soluciones de a) y b):

$$((-\infty, \frac{23}{17}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)) \cap [-4, \frac{5}{2}) = [-4, \frac{23}{17}).$$



1.7 Demostrar a), c), d), e) y g) de las propiedades de valor absoluto.

a)

Supongamos que $x > 0$:

$$|x| = x = -(-x) = |-x|.$$

Supongamos que $x < 0$:

$$|x| = -x = |-x|.$$

Si $x = 0$ la igualdad también se satisface.



c)

Si $x = 0$ se tiene la igualdad.

Si $x > 0$ entonces se tiene:

$$|x| = x \quad \text{y} \quad -|x| \text{ es negativo, por lo tanto } -|x| < x; \text{ es decir, que se puede escribir } -|x| \leq x \leq |x|$$

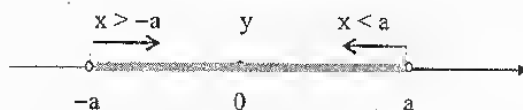
Si $x < 0$ entonces se tiene:

$$|x| = -x \quad \text{luego } -|x| = x; \text{ y } |x| \text{ es positivo, por lo tanto } x < |x|; \text{ es decir } -|x| \leq x \leq |x|.$$



d)

$|x| < a$ representa geoméricamente el conjunto de números cuya distancia al origen es menor que a:

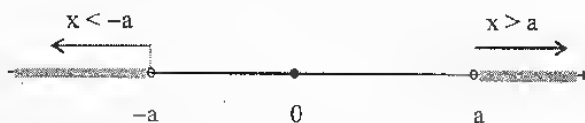


x está en el intervalo $(-a, a)$, es decir, $-a < x < a$.



e)

A su vez la inecuación $|x| > a$ representa geoméricamente el conjunto de puntos cuya distancia al origen es mayor que a:



es decir $x > a$ o $x < -a$.



g)

Sean x e y números reales cualesquiera, entonces $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$, sumando miembro a miembro las dos desigualdades se tendrá

$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$ que es equivalente (propiedad d)) a $|x+y| \leq |x|+|y|$.



1.8 Resuelva las siguientes ecuaciones:

i) $|4-3x| = 5$

Se usa la propiedad c), donde identificamos a como 5 y x toda la expresión afectada por el valor absoluto, es decir, $4-3x$; por lo tanto, se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$4-3x = 5$, cuya solución es $x = -\frac{1}{3}$.

$4-3x = -5$, cuya solución es $x = 3$.



ii) $|x+1| |x-2| = 3$

Primeramente, usamos la propiedad b) para transformar el producto de módulos en el módulo de un producto:

$|x+1| |x-2| = |(x+1)(x-2)| = |x^2-x-2| = 3$, ecuación ésta equivalente, por la propiedad f), a las dos siguientes:

a) $x^2-x-2 = 3$ cuyas soluciones son $x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ y $x_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

b) $x^2-x-2 = -3$ que no tiene soluciones en \mathbb{R} , pues el discriminante es negativo.

Las soluciones de la ecuación planteada originalmente son así las de a).



iii) $||x-1|+2| = 4$

Se aplica nuevamente la propiedad c) para obtener las dos ecuaciones equivalentes:

a) $|x-1|+2 = 4$

b) $|x-1|+2 = -4$

Resolvemos ahora cada una de ellas:

$|x-1|+2 = 4 \Leftrightarrow |x-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2, & \text{cuya solución es } x = 3. \\ x-1 = -2, & \text{cuya solución es } x = -1. \end{cases}$

$|x-1|+2 = -4 \Leftrightarrow |x-1| = -6$ que no tiene solución, pues el valor absoluto siempre es mayor o igual a cero.

Las soluciones de la ecuación son así $x = 3$ y $x = -1$.



1.9 Determine gráfica y analíticamente los siguientes conjuntos de la recta real:

a) El conjunto de números cuya distancia al cero es igual a 3, menor que 3 y mayor que 3.

Analíticamente

$|x| = 3$

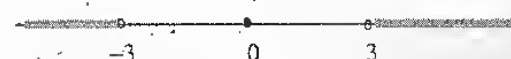
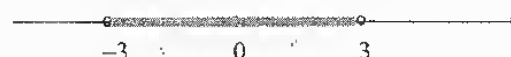
La solución corresponde a dos puntos $x = 3$ y $x = -3$.

$|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

La solución es el intervalo $(-3,3)$.

$|x| > 3 \Leftrightarrow x > 3 \text{ o } x < -3$

Gráficamente



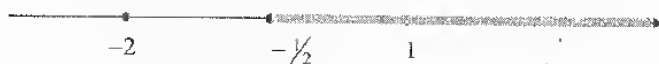
La solución es la unión de intervalos $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.



b) El conjunto de números cuya distancia a -2 sea mayor que la distancia a 1 .

Gráficamente:

$P_m = -\frac{1}{2}$, punto medio entre -2 y 1 . Todos los puntos a la derecha de P_m están más cerca de 1 que de -2 .



Analíticamente: Se debe resolver la inecuación:

$$d(x; -2) > d(x; 1),$$

lo cual es equivalente (véase definición de distancia en \mathbb{R}) a

$$|x - (-2)| > |x - 1|.$$

Resolución de la inecuación anterior:

A fin de hacer desaparecer las barras de valor absoluto, se tiene que aplicar la definición; para ello, se consideran varios casos o condiciones:

i) Si $x+2 \geq 0$ y $x-1 \geq 0$ se tiene que $|x+2| = x+2$ y $|x-1| = x-1$.

La inecuación se convierte en $x+2 > x-1$, de donde $2 > -1$, lo cual es verdadero y significa que el conjunto solución es \mathbb{R} ; se debe ahora intersectar este conjunto con los intervalos resultantes de las condiciones:

$$[-2, +\infty) \cap [1, +\infty) \cap (-\infty, +\infty) = [1, +\infty).$$

ii) Si $x+2 \geq 0$ y $x-1 < 0$ se tiene que $|x+2| = x+2$ y $|x-1| = -(x-1)$.

La inecuación se convierte en $x+2 > -(x-1)$, de donde $x > -\frac{1}{2}$; se debe ahora intersectar este intervalo con los intervalos que resultan de las condiciones:

$$(-\frac{1}{2}, +\infty) \cap [-2, +\infty) \cap (-\infty, 1) = (-\frac{1}{2}, 1).$$

iii) Si $x+2 < 0$ y $x-1 < 0$ se tiene que $|x+2| = -(x+2)$ y $|x-1| = -(x-1)$.

La inecuación se convierte en $-(x+2) > -(x-1)$, de donde $-2 > 1$ que es falso y significa que la solución de la inecuación es el conjunto \emptyset ; la intersección de este conjunto con los intervalos resultantes de las condiciones sigue dando el conjunto vacío.

iv) Si $x+2 < 0$ y $x-1 \geq 0$ se tiene que $|x+2| = -(x+2)$ y $|x-1| = x-1$.

La inecuación se convierte en $-(x+2) > x-1$, de donde $x < -\frac{1}{2}$; igual que antes, se debe "intersectar esta solución con las condiciones":

$$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cap [1, +\infty) \cap (-\infty, -\frac{1}{2}) = \emptyset.$$

El intervalo solución de la ecuación original es la **unión** de los intervalos obtenidos en cada caso:

$$(-\frac{1}{2}, 1) \cup [1, +\infty) = (-\frac{1}{2}, +\infty).$$



1.10 Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{|2-x|}{|x+8|} \geq 0$

$$\frac{|2-x|}{|x+8|} = \frac{|2-x|}{|x+8|} \geq 0. \text{ El valor absoluto siempre es mayor igual que cero, por lo tanto, todos los números}$$

reales son solución de esta inecuación, exceptuando aquellos que anulan el denominador, es decir, $x = -8$.

Solución: $\mathbb{R} - \{-8\}$.



b) $\frac{x^3 - 1}{|20x^2 - 5x + 1|} \leq 0$

El denominador es positivo o a lo sumo igual a cero, pero aquí la ecuación de segundo grado tiene discriminante negativo, lo cual significa que no se anula, por lo tanto, el cociente es menor o igual que cero si (numerador):

$$x^3 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

De esta forma, la solución de la inecuación es el intervalo $(-\infty, 1]$.



c) $\left| -\frac{1}{4}x + 1 \right| < 2$

Por la propiedad d) de valor absoluto, la inecuación es equivalente a esta otra:

$$-2 < -\frac{1}{4}x + 1 < 2$$

(Multiplicando por -4)

$$\Leftrightarrow 8 > x - 4 > -8$$

(Sumando 4 a todos los miembros de la ecuación)

$$\Leftrightarrow 12 > x > -4.$$

La solución de la inecuación es el intervalo $(-4, 12)$.



d) $|x^2 - 2x - 2| \geq 1$

Por la propiedad e) de valor absoluto esta inecuación es equivalente a:

$$\text{i) } x^2 - 2x - 2 \geq 1 \quad \text{o} \quad \text{ii) } x^2 - 2x - 2 \leq -1.$$

Solución de i):

$$x^2 - 2x - 2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0. \text{ Las raíces de la ecuación de 2º grado son } x = 3 \text{ y } x = -1.$$

Intervalo	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		+		-		+	

El intervalo solución es $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

Solución de ii):

$$x^2 - 2x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0. \text{ Las raíces de la ecuación de 2º grado asociada son } x = 1 - \sqrt{2} \text{ y } x = 1 + \sqrt{2}.$$

Intervalo	$-\infty$		$1 - \sqrt{2}$		$1 + \sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2 - 2x - 1$		+		-		+	

El intervalo solución es $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

La solución de la inecuación es la **unión** de los intervalos solución de i) y de ii):

$$(-\infty, -1] \cup [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}] \cup [3, +\infty).$$



e) $2 < |-x + 3| < 4$

La solución de la inecuación es el conjunto de los valores para x que satisfacen a la vez las siguientes inecuaciones:

$$\text{i) } |-x + 3| < 4 \quad \text{y} \quad \text{ii) } |-x + 3| > 2.$$

Solución de i):

$$|-x + 3| < 4 \Leftrightarrow -4 < -x + 3 < 4 \Leftrightarrow -7 < -x < 1 \Leftrightarrow 7 > x > -1, \quad \text{que escrito en forma de intervalo es } S_i = (-1, 7).$$

Solución de ii):

$$|-x + 3| > 2 \Leftrightarrow -x + 3 > 2 \quad \text{o} \quad -x + 3 < -2$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \quad \text{o} \quad x > 5, \quad \text{que escrito en forma de intervalo es } S_{ii} = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty).$$

La solución de la inecuación es la **intersección** de los intervalos solución de i) y de ii):

$$S = S_I \cap S_{II} = (-1, 1) \cup (5, 7).$$

f) $|1-x^2| > x-1$ ☑

a) Si $x-1 < 0$, es decir, $x < 1$, la desigualdad se satisface ya que el valor absoluto de cualquier número, por definición, es mayor igual que cero.

b) Si $x-1 \geq 0$ el ejercicio es similar al d), en el sentido de que se aplica la misma propiedad:

$$|1-x^2| > x-1 \Leftrightarrow 1-x^2 > x-1 \quad \text{o} \quad 1-x^2 < -(x-1)$$

i)
ii)

Solución de i):

$1-x^2 > x-1 \Leftrightarrow -x^2-x+2 > 0$. Las raíces de la ecuación de 2º grado asociada son $x = -2$ y $x = 1$.

Intervalo	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$-x^2-x+2$		-	+	-

Por lo tanto, la solución es el intervalo $(-2, 1)$.

Solución de ii):

$1-x^2 < -(x-1) \Leftrightarrow -x^2+x < 0$. Las raíces de la ecuación de 2º grado asociada son $x = 0$ y $x = 1$.

Intervalo	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x^2+x$		-	+	-

Por lo tanto la solución es $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

La solución de la parte b) es la **unión** de los intervalos solución de i) y de ii), **intersectando ésta** con el intervalo que resulta de la condición bajo la cual se trabaja en b):

$$((-2, 1) \cup ((-\infty, 0) \cup (1, +\infty))) \cap [1, +\infty) = (1, +\infty).$$

La solución de la inequación inicial es la **unión** de los intervalos solución de a) y de b):

$$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

g) $|x+1| - |x-2| \leq -2$ ☑

El ejercicio se puede resolver como los anteriores, aplicando las propiedades d) y e) de valor absoluto, sin embargo es tal vez más cómoda la definición, que también nos permite eliminar el símbolo de valor absoluto; para ello se debe imponer condiciones:

a) Si $x+1 \geq 0$ y $x-2 \geq 0$ se tiene que $|x+1| = x+1$ y $|x-2| = x-2$.

Escribamos la ecuación original sin las barras:

$$|x+1| - |x-2| \leq -2 \Leftrightarrow (x+1) - (x-2) \leq -2$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq -2,$$

lo cual indica que la solución es el conjunto \emptyset .

$$S_a = \emptyset$$

b) Si $x+1 \geq 0$ y $x-2 < 0$ se tiene que $|x+1| = x+1$ y $|x-2| = -(x-2)$.

Por lo tanto, $|x+1| - |x-2| \leq -2 \Leftrightarrow (x+1) - (-(x-2)) \leq -2$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}.$$

Para obtener la solución de b) se debe intersectar con los intervalos resultantes de las condiciones:

$$S_b = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cap [-1, +\infty) \cap (-\infty, 2) = [-1, -\frac{1}{2}].$$

c) Si $x+1 < 0$ y $x-2 \geq 0$. La intersección de los intervalos que resultan de estas condiciones es vacía; por lo tanto, no es necesario resolver la inequación:

$$S_c = \emptyset.$$

d) Si $x+1 < 0$ y $x-2 < 0$ se tendrá que:

$$\begin{aligned} |x+1| - |x-2| &\leq -2 \Leftrightarrow -(x+1) - (-(x-2)) \leq -2 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq -2, \end{aligned}$$

lo cual indica que la solución es \emptyset . Para obtener la solución de d) se debe intersectar con los intervalos resultantes de las condiciones:

$$S_d = (-\infty, +\infty) \cap (-\infty, -1) \cap (-\infty, 2) = (-\infty, -1)$$

Para finalizar, la solución de la inecuación es: $S = S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d = (-\infty, -1) \cup [-1, -\frac{1}{2}] = (-\infty, -\frac{1}{2}]$.



h) $\frac{|x^2 + 5x - 1|}{3x - 1} > 3$

Se usará la definición de valor absoluto para eliminar las barras de módulo:

La ecuación de 2º grado $x^2 + 5x - 1 = 0$ tiene raíces $x = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$, por lo tanto

$x^2 + 5x - 1 \geq 0$ si $x \in (-\infty, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, +\infty)$ y $x^2 + 5x - 1 < 0$ si $x \in (\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2})$, luego

$$|x^2 + 5x - 1| = \begin{cases} x^2 + 5x - 1 & \text{si } x \in (-\infty, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, +\infty) \\ -(x^2 + 5x - 1) & \text{si } x \in (\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}) \end{cases}$$

Por lo tanto, $\frac{|x^2 + 5x - 1|}{3x - 1} > 3$ si y sólo si

i) $\frac{x^2 + 5x - 1}{3x - 1} > 3$ si $x \in (-\infty, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, +\infty)$, inecuación ésta que pasamos a resolver:

$$\frac{x^2 + 5x - 1}{3x - 1} > 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x - 1}{3x - 1} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 2}{3x - 1} > 0,$$

las raíces del numerador y denominador son, respectivamente: $x = 2 \pm \sqrt{2}$ y $x = \frac{1}{3}$

Intervalo	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$2 - \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$\frac{x^2 - 4x + 2}{3x - 1}$	+	+	-	+	+
$\frac{x^2 - 4x + 2}{3x - 1}$	-	+	+	-	+

la solución es $(\frac{1}{3}, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$. Para obtener la solución de i) se debe tener en cuenta la condición bajo la cual se escribió i), es decir, se debe hacer la siguiente intersección:

$$\left((-\infty, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, +\infty) \right) \cap \left((\frac{1}{3}, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty) \right) = (\frac{1}{3}, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty).$$

ii) $\frac{-(x^2 + 5x - 1)}{3x - 1} > 3$ si $x \in (\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2})$, inecuación ésta que pasamos a resolver:

$$\frac{-(x^2 + 5x - 1)}{3x - 1} > 3 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 5x + 1}{3x - 1} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 14x + 4}{3x - 1} > 0,$$

las raíces del numerador y denominador son, respectivamente: $x = -7 \pm \sqrt{53}$ y $x = \frac{1}{3}$

Intervalo	$-\infty$	$-7 - \sqrt{53}$	$-7 + \sqrt{53}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-x^2 - 14x + 4$		-	+	-	-
$3x - 1$		-	-	-	+
$\frac{-x^2 - 14x + 4}{3x - 1}$		+	-	+	-

la solución es $(-\infty, -7 - \sqrt{53}) \cup (-7 + \sqrt{53}, \frac{1}{3})$. Igual que antes, para obtener la solución de ii) se debe tener en cuenta la condición bajo la cual se escribió ii):

$$\left(\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}\right) \cap ((-\infty, -7 - \sqrt{53}) \cup (-7 + \sqrt{53}, \frac{1}{3})) = \emptyset.$$

La solución de la inecuación inicial es la **unión** de las soluciones de i) y de ii):

$$((\frac{1}{3}, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)) \cup \emptyset = (\frac{1}{3}, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty).$$



Sin embargo, resulta más cómodo resolver el ejercicio por otra vía:

Si $\frac{|x^2 + 5x - 1|}{3x - 1} > 3$ se puede afirmar que $\frac{|x^2 + 5x - 1|}{3x - 1} > 0$, lo cual ocurre solamente si $3x - 1 > 0$ puesto que el numerador es positivo; es decir, $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$. Bajo esta condición la inecuación

$$\frac{|x^2 + 5x - 1|}{3x - 1} > 3 \Leftrightarrow |x^2 + 5x - 1| > 3(3x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \text{a) } x^2 + 5x - 1 > 9x - 3 \quad \text{ó} \quad \text{b) } x^2 + 5x - 1 < -9x + 3.$$

Resolución de a):

$x^2 + 5x - 1 > 9x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 > 0$; las raíces de la ecuación de 2º grado asociada son $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ y la parábola se abre hacia arriba, por lo tanto, la solución es

$$S_a = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty).$$

Resolución de b):

$x^2 + 5x - 1 < -9x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 14x - 4 < 0$, las raíces de la ecuación son $-7 - \sqrt{53}$ y $-7 + \sqrt{53}$; y la parábola asociada se abre hacia arriba, por lo tanto la solución es

$$S_b = (-7 - \sqrt{53}, -7 + \sqrt{53}).$$

Ahora, la solución de la inecuación original será:

$$S_a \cup S_b \cap (\frac{1}{3}, +\infty) = (\frac{1}{3}, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty).$$



EJERCICIOS PARA SER RESUELTOS POR EL ESTUDIANTE

1.- a) Pruebe d) en las propiedades de las desigualdades.

b) Pruebe que si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x^2 \geq 0$.

2.- Grafique, usando intervalos, los conjuntos de números reales que satisfacen las siguientes desigualdades:

2.1 $-4 \leq x < \frac{1}{2}$

2.2 $x \geq 3$

2.3 $-x > 3$

2.4 $-6 < -x$

3.- Resuelva las siguientes inecuaciones:

3.1 $\frac{3}{5}x \leq -4$

3.3 $5x - 6 \geq 5$

3.5 $1 \leq \frac{2x+14}{-3} < 2$

3.7 $x^2 + 3x - 1 > 0$

3.9 $x^3 \leq x$

3.11 $\begin{cases} 2x+3 \geq 5x \\ 5x-1 < 7-3x \end{cases}$

3.13 $\frac{3}{x^2 - 2x + 1} > 0$

3.15 $\sqrt{2x+3} > 1$

3.17 $\frac{x}{x-1} > 0$

3.19 $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$

3.21 $x - 2 \leq 2x - 3 < -4$

3.23 $\frac{2x-1}{x+4} < \frac{x}{x+4} \leq \frac{x+1}{x+4}$

3.2 $-7x > 3$

3.4 $x + 9 < 3 - 2x$

3.6 $(x+3)(x-2) \geq 0$

3.8 $x^2 + 2x < -4$

3.10 $(x-1)^2 - (2-x)^2 < 3x+1$

3.12 $\begin{cases} 3x+2 \leq -4 \\ 2x^2 - 1 < x^3 \end{cases}$

3.14 $\frac{10}{x^2 + 7x - 1} < 0$

3.16 $\sqrt{x^2 - 4} < 1$

3.18 $\frac{x^2+5}{x} < 0$

3.20 $\frac{3-x}{4x+1} < -4$

3.22 $0 < \frac{1-2x}{x+1} < 1$

4.- Las medias aritmética m, geométrica g y armónica h de dos números a y b se definen por:

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad g = \sqrt{ab}, \quad \frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Demstrar que si $0 < a < b$ entonces $a < h < g < m < b$.

5.- Demostrar que si $y < x < 0$ entonces $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$.

6.- Probar que si $y < x < 0$ entonces $y^2 > x^2 > 0$.

7.- Probar b) y h) de las propiedades de valor absoluto.

8.- Resuelva las siguientes ecuaciones:

8.1 $|3x| = 4$

8.3 $|x+7| = 0$

8.5 $|2x^2 + x - 1| = 1$

8.7 $||x+3|-2| = 4$

8.9 $|x+3| = 1-x^2$

8.2 $|-3x| = 4$

8.4 $|8x-9| = 1$

8.6 $|x+i||x+4| = 10$

8.8 $|x^2 - 1| = x$

9.- Determine gráfica y luego analíticamente los siguientes subconjuntos de la recta real:

9.1 El conjunto de números cuya distancia a 2 es menor que 4.

9.2 El conjunto de números cuya distancia a -2 es menor que 4

9.3 El conjunto de números cuya distancia a 2 es mayor que 4

9.4 El conjunto de números cuya distancia a -3 sea menor que la distancia a 1.

9.5 El conjunto de números cuya distancia a 0 sea mayor que la distancia a -5

9.6 El conjunto de números cuya distancia a 4 sea mayor que la distancia de b a 1.

10.- Resuelva las siguientes inecuaciones:

$$10.1 \quad \frac{|x+3|}{|5-x|} \leq 0$$

$$10.3 \quad \frac{x^3-1}{x^2+2x+1} \geq 0$$

$$10.5 \quad \left| -\frac{7}{8}x \right| > 3$$

$$10.7 \quad |x+4| \geq 3$$

$$10.9 \quad |-x^2-5x+5| \leq 1$$

$$10.11 \quad \frac{|7-x|}{x+1} < 3$$

$$10.13 \quad |1-x| < 2x$$

$$10.15 \quad |4-x| + |2x-1| \leq 4$$

$$10.17 \quad \frac{|x-7|}{|x-6|} \geq 3x$$

$$10.19 \quad \frac{|x+3|}{x^2} > 3$$

$$10.2 \quad \frac{|x-5|}{|7-x|} > 0$$

$$10.4 \quad \frac{|x^3+5x^2+x-1|}{1-7x} < 0$$

$$10.6 \quad \left| -\frac{7}{8}x \right| < 3$$

$$10.8 \quad |5-2x| < 6$$

$$10.10 \quad |x^3-1| \geq 1$$

$$10.12 \quad \frac{|x+1|}{|1-x|} > 2$$

$$10.14 \quad |x^2-1| > x$$

$$10.16 \quad |3x-2| < |x+1|$$

$$10.18 \quad \frac{|x+3|}{x} > 3$$

$$10.20 \quad \frac{|x+3|}{x} < 3$$

11.- Un satélite artificial se mantiene en órbita alrededor de la tierra a una altura de h Kilómetros si su velocidad, en Km/h, es $v = \frac{626.4}{h} + R$, donde R es el radio de la Tierra (6372 Km.). Calcular las velocidades del satélite para que se mantenga a alturas superiores a 120Km. de la superficie terrestre.

12.- La fuerza que se requiere para estirar un resorte x centímetros a partir de su posición natural, de acuerdo con la ley de Hooke, es $F = 6.4x$. Calcular cuánto se estira el resorte para $5 \leq F \leq 10$.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS IMPARES

$$3.1 \quad (-\infty, -20/3]$$

$$3.3 \quad [11/5, \infty)$$

$$3.5 \quad (-10, -17/2]$$

$$3.7 \quad \left(-\infty, -\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(-\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$$

$$3.9 \quad (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

$$3.11 \quad (-\infty, 1)$$

$$3.13 \quad (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$3.15 \quad (-1, \infty)$$

$$3.17 \quad (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

$$3.19 \quad (-\infty, -2) \cup [1, \infty)$$

$$3.21 \quad \emptyset$$

$$3.23 \quad (-4, 1)$$

$$8.1 \quad \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$$

$$8.3 \quad -7$$

$$8.5 \quad -\frac{1}{2}, 0, \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$8.7 \quad 3, -9$$

$$8.9 \quad \text{No tiene solución}$$

$$9.1 \quad (-2, 6)$$

$$9.3 \quad (-\infty, -2) \cup (6, \infty)$$

$$9.5 \quad \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$$

$$10.1 \quad -3$$

$$10.3 \quad [1, \infty)$$

$$10.5 \quad \left(-\infty, -\frac{24}{7}\right) \cup \left(\frac{24}{7}, \infty\right)$$

bien.

17

10. $(-\infty, -7] \cup [-1, \infty)$

10.9

$$\left[-6, -\frac{5+\sqrt{41}}{2} \right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{41}}{2}, 1 \right]$$

10.11 $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$

10.13 $\left(\frac{1}{3}, \infty \right)$ 10.15 $\left[\frac{1}{3}, 1 \right]$

10.17 $\left(-\infty, \frac{19-\sqrt{277}}{6} \right) \cup \left(\frac{19+\sqrt{277}}{6}, 6 \right) \cup \left(6, \frac{17+\sqrt{373}}{6} \right)$

10.19 $\left(\frac{1-\sqrt{37}}{6}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{37}}{6} \right)$

11

$$0 < v < 6377.22$$

2 RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

BREVE RESEÑA HISTORICA

Cualquier concepto científico sólo puede desarrollarse y ganar precisión y generalidad sobre la base de los problemas que él permite resolver. A esta premisa no se escapan las matemáticas. Los problemas primarios en que el hombre tiene necesidad del concurso de las matemáticas, mejor dicho del número, son problemas de comercio y medición de tierras; ello dio lugar a la **geometría** donde los griegos fueron muchísimo más allá de sus necesidades prácticas, y construyeron una teoría axiomática que permitía demostrar sus resultados con todo rigor, sin la intervención del número. Todos en bachillerato hemos hecho contacto con los conocimientos de Pitágoras (siglo VI a. C.), Euclides (siglo IV a. C.); y Arquímedes (siglo III a. C.) conocido por su principio de flotabilidad.

En cuanto a la **aritmética**, los griegos estaban ya en posesión de gran parte del material contemporáneo, pero les eran desconocidos ciertos elementos esenciales: los números negativos y el cero, que aparecen a partir de la alta Edad Media en la matemática hindú, los números irracionales por ser magnitudes no mensurables y, finalmente, el uso de símbolos y letras. Es cierto que Diofanto (siglo III d. C.) hizo uso de símbolos literales para expresar una cantidad desconocida y también para la adición, sustracción e igualdad, pero sus ecuaciones algebraicas estaban todavía escritas con coeficientes numéricos concretos.

Los conocimientos geométricos de los griegos fueron llevados a la escuela de Alejandría, ciudad construida por Alejandro Magno (356-323 a. C.) y que llegó a ser la sede principal de la sabiduría en la cuenca mediterránea. Uno de sus profesores fue Eratóstenes quien calculó la circunferencia terrestre aproximadamente igual a 40.000 Km y mil años antes que los barcos del portugués Magallanes dieran la vuelta a nuestro planeta por primera vez.

Mientras Europa comenzaba su sueño bajo el manto del oscurantismo religioso, en la India empezaron a utilizar fracciones, el cero, primeramente como símbolo antes de ser considerado como un número, y los números negativos.

La unificación de Arabia bajo el mando del profeta y fundador de la religión Musulmana, Mahoma, dio lugar a un nuevo centro de poder con capital en Bagdad; aquí convergían los comerciantes hindúes, quienes notificaron a los árabes la existencia del nuevo sistema numérico. Rápidamente Bagdad se constituyó en la capital

del saber. Mercaderes y matemáticos de la lejana India aportaron los nuevos signos numéricos y su aritmética. Herejes, huidos del cristianismo, aportaron las obras científicas escritas en Alejandria, entre ellas se hallaban tratados de astronomía, geografía y la geometría de los griegos. En las escuelas de Bagdad floreció la trigonometría, y usando la nueva aritmética, los musulmanes hicieron un uso más amplio y perfecto de la geometría euclídeana; es célebre el matemático y astrónomo árabe Mahommed ibn Musa al-Khuwarizmi, del siglo IX, (Mahommed, hijo de Musa, nativo de Kharizmi) quien introdujo la función seno y escribió el tratado “Hisab al-jabr w'al-muqabala” que significa “transposición y eliminación”, que como es de suponer trata de cómo resolver ecuaciones. La palabra **álgebra** proviene, pues, de al-jabr.

¹ “Nunca hasta entonces había conseguido el hombre avanzar tanto en sus conocimientos como en aquel solo siglo, entre los años 800 y 900 d. de C., cuando se esposaron en Bagdad las sabidurías de Oriente y Occidente”

En su expansión colonizadora y evangelizadora, los árabes introdujeron en Europa sus conocimientos a través de las Universidades Mahometanas en España; estos se fueron filtrando hacia los monjes científicos quienes estudiaban y traducían los tratados algebraicos y geométricos al latín. Durante algunos siglos en Europa no se perfeccionó la ciencia importada, y los aportes fueron casi nulos. Más allá del clero, eran muy escasos los individuos instruidos, básicamente por el férreo control que la iglesia ejercía sobre las universidades que se iban fundando en los siglos XII y XIII. Sin embargo, como en todo, existen islotes, por ejemplo, Leonardo de Pisa (1170-1250) quien recibió formación matemática en Argelia, introdujo en Europa algunas ideas y libros brillantes.

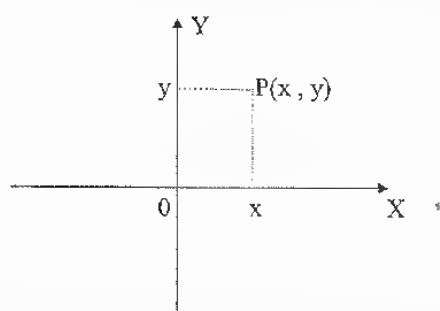
Como vemos, son el álgebra y la trigonometría las que ocupan la mente de los científicos de la Edad Media (siglos VI a XIV), lo cual se explica por el desarrollo del comercio y la astronomía; impulsados, a su vez, por los viajes geográficos marítimos que comenzaban a salir de la cuenca del Mediterráneo y demandaban nuevos sistemas de orientación y una cartografía más refinada; en alta mar no hay montañas ni cabos para guiarse; con cielo despejado, sólo las estrellas acompañaban a los marinos. El resto de la tecnología de la Edad Media no necesitaba del concurso de nuevas y sofisticadas herramientas matemáticas. Pero algunas ideas y teorías vienen a conspirar contra este estado de inercia.

2.1 Sistema de coordenadas rectangulares

¹ Copiado textualmente de “El maravilloso mundo de las Matemáticas” por Lancelot Hogben

La identificación entre los números reales y los puntos de una recta, no solamente permite modelar matemáticamente la distancia sobre una recta, sino que es la base del paso gigantesco dado por Descartes, de introducir en el plano un sistema de "orientación" o como es más conocido **sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano**, en honor a ese matemático, que actualmente se hace de la siguiente forma:

Se trazan dos rectas perpendiculares (**ejes de coordenadas**). La recta horizontal se conoce como eje OX y la vertical como eje OY. El punto intersección, O, será el **origen** del sistema y el origen para cada eje, que se dotarán de una escala. Los puntos a la derecha sobre el eje OX y hacia arriba sobre el eje OY se identificarán con los números positivos; los puntos a la izquierda y hacia abajo sobre los ejes se asocian con los números negativos.

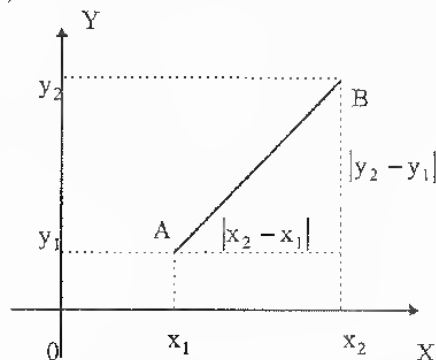


Ahora, a cada punto P del plano le podemos asignar un par ordenado de números: trazando por el punto rectas paralelas a los ejes de coordenadas, las cuales interceptarán los ejes en puntos de coordenadas, digamos, x e y, respectivamente; por lo tanto al punto P del plano se le asignará el par ordenado (x,y) donde a x se le designa por **abscisa** y a y por **ordenada** de P. Podemos además observar que los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro sectores denominados **cuadrantes**.

Prácticamente, hasta el siglo XVII la geometría de los griegos fue construida en forma axiomática sin la intervención del número, con la introducción por Descartes de esta idea tan simple, de dotar el plano de un sistema de referencia, se logra modelar la distancia entre dos puntos del plano y con ello describir las curvas mediante ecuaciones y cuantificar la geometría; comienza de esta forma lo que hoy día se conoce con el nombre de **geometría analítica**. El estudiante podrá observar la diferencia entre demostraciones puramente geométricas (sin mediación de números) en los ejercicios 2.6 a), b) y parte del c), y donde intervienen coordenadas (números) en el ejercicio 2.5 y parte del 2.6 c).

2.2 Distancia en el plano

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos del plano, la distancia entre ellos es un número real denotado por $d(A;B)$.



Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$d(A,B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2},$$

pero $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ y $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$,
luego:

$$d(A;B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Un *error de cálculo muy común* entre el estudiantado es decir que $\sqrt{x^2} = x$, lo cual es falso si $x < 0$. Aclaremos este asunto:

La distancia del punto $(x, 0)$ al origen de coordenadas es de acuerdo con la fórmula de distancia anterior $\sqrt{(x-0)^2} = \sqrt{x^2}$. Pensando ahora el punto sobre una recta (eje OX), su coordenada viene dada por el número x y su distancia al origen es $|x|$. Igualando resulta:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

con validez para $x \in \mathbb{R}$.

2.3 Coordenadas del punto medio

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos del plano. Véase la figura anexa.

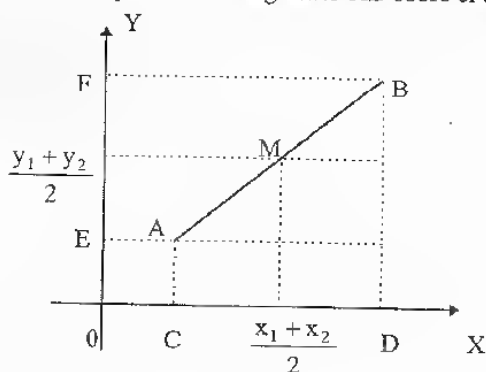
Proyectemos el segmento \overline{AB} sobre el eje OX, determinando otro segmento \overline{CD} cuyo punto medio será:

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Proyectando \overline{AB} sobre el eje OY se obtiene el segmento \overline{EF} con punto medio $\frac{y_1 + y_2}{2}$.

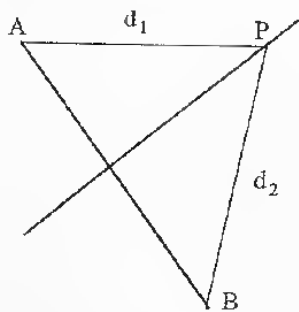
Tenemos, por lo tanto, dos triángulos rectángulos de catetos iguales uno a uno, luego $AM = MB$ (hipotenusas) y las coordenadas de M son:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



2.4 Definición de recta

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos (recta mediatriz del segmento que une los dos puntos).



$$d_1 = d(A, P) \\ d_2 = d(B, P)$$

Sean $A(a, b)$, $B(c, d)$ dos puntos del plano tales que $c \neq a$ y $P(x, y)$ un punto sobre la recta, luego:

$$d(A, P) = d(B, P),$$

$$\text{o sea } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2},$$

desarrollando y simplificando resulta:

$$(2c - 2a)x + (2d - 2b)y + a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 0,$$

donde poniendo $A = 2c - 2a$, $B = 2d - 2b$ y

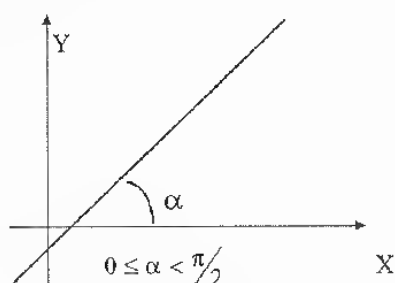
$C = a^2 + c^2 - b^2 - d^2$, se tiene la ecuación general de la recta:

$$Ax + By + C = 0$$

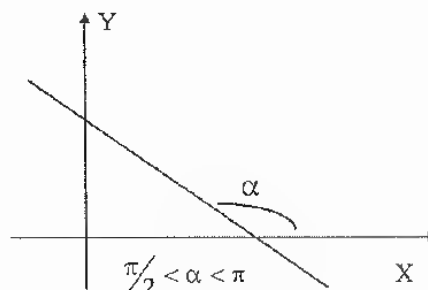
Si $c = a$ tenemos $y = k$ (recta horizontal); si $b = d$ tenemos $x = k$ (recta vertical).

2.5 Definición de ángulo de inclinación

Llamamos **ángulo de inclinación** de una recta al ángulo entre la dirección positiva del eje OX y la recta, medido en sentido antihorario.



2.5.a



2.5.b

El ángulo de inclinación es tal que $0 \leq \alpha < \pi$.

2.6 Definición de pendiente

Llamamos **pendiente** de una recta a la tangente del ángulo de inclinación. La cual denotaremos por m

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Siendo $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera sobre la recta, tales que $x_1 \neq x_2$, entonces

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

De la definición de pendiente se observa que si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, m no estará definida; este caso corresponde a $x_1 = x_2$, la recta es vertical. Si $m > 0$ tendremos una recta inclinada como la de figura 2.5.a y si $m < 0$ la inclinación de la recta es como se muestra en la figura 2.5.b. En todo caso el valor de la pendiente m es independiente de los puntos P y Q que se tomen para calcularla.

2.7 Ecuaciones de la recta:

Ecuación general:

$$Ax + By + C = 0$$

Conocidos un punto y su pendiente:

Sea $Q(x_1, y_1)$ el punto dado y $P(x, y)$ cualquier otro sobre la recta, luego $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$, de donde

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Si m toma valores en \mathbb{R} se tendrá un **haz de rectas o familia de rectas** que pasan por el punto (x_1, y_1) . Si el punto es $(0, b)$ su ecuación es: $y = mx + b$, donde b es la ordenada del punto de intersección entre la recta y el eje OY.

Conocidos dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad x_1 \neq x_2.$$

Recta vertical:

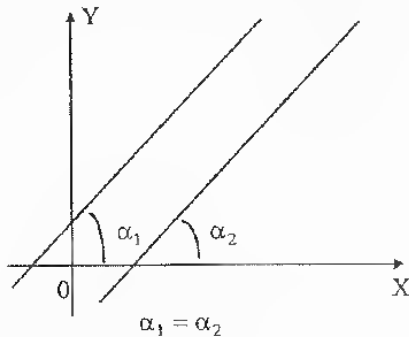
$$x = c \quad c \in \mathbb{R}$$

2.8 Definición (paralelismo)

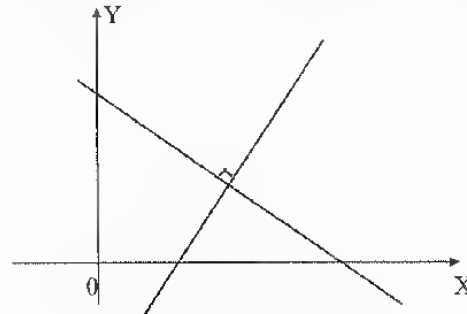
Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen igual ángulo de inclinación.

2.9 Definición (perpendicularidad)

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si forman entre ellas ángulos de 90° .



2.3 Rectas paralelas



2.4 Rectas perpendiculares

2.10 Teorema (condición de paralelismo)

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen igual pendiente, o bien ambas son paralelas al eje OY (verticales).

Demostración:

Si dos rectas no verticales son paralelas tienen igual ángulo de inclinación, de donde

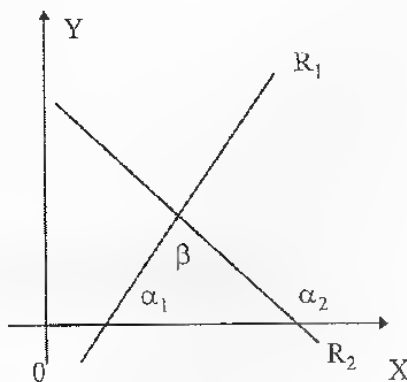
$$m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 = m_2.$$

Recíprocamente, si $m = \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, como los ángulos de inclinación varían en el intervalo $(0, \pi)$, se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2$.

2.11 Teorema (condición de perpendicularidad)

Dos rectas de pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$, o bien una es vertical y otra horizontal.

Demostración:



donde $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Supongamos que las rectas R_1 y R_2 son perpendiculares ($\beta = \frac{\pi}{2}$) entonces se tiene que $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$, luego:

$$m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow m_1 m_2 = -1.$$

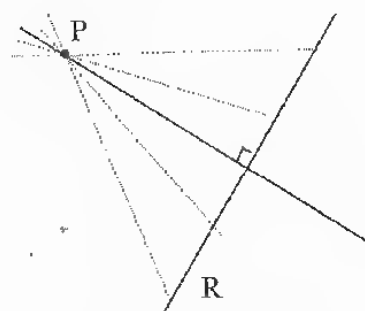
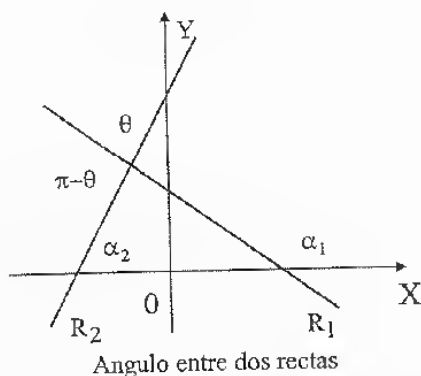
Recíprocamente, si $m_1 m_2 = -1$ tenemos $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \operatorname{tg} \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right)$, como $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \pi$ implica $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ o sea $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, de

2.12 Ángulo entre dos rectas

Sean R_1 y R_2 dos rectas **no perpendiculares**, con ángulos de inclinación α_1 , α_2 y pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Siendo α_1 el mayor de los ángulos de inclinación, el ángulo θ (ver figura anexa) entre ambas rectas es tal que $\theta + \alpha_2 + (\pi - \alpha_1) = \pi$, o sea $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$, de donde:

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}} \quad \text{luego} \quad \boxed{\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right)}$$

El otro ángulo entre ambas rectas es $\pi - \theta$.



2.13 Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto P a una recta R se debe entender como la *distancia más corta del punto a la recta*, ésta se obtiene por la perpendicular trazada desde el punto a la recta, y viene dada por

$$\boxed{d(P, R) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

donde (x_0, y_0) son las coordenadas de P y $Ax + By + C = 0$ es la ecuación general de la recta R .

Demostración:

Cuando se habla de la distancia de un punto a una recta se debe entender, como es natural, la distancia más corta del punto a la recta. Es fácil probar usando el teorema de Pitágoras que ésta se obtiene por la perpendicular a R trazada por P .

La recta perpendicular a R que pasa por P tiene ecuación

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0).$$

Se calculan las coordenadas del punto intersección entre las dos rectas que son:

$$x = \frac{B^2 x_0 - A B y_0 - A C}{B^2 + A^2} \quad \text{e} \quad y = y_0 + B \left(\frac{-B y_0 - A x_0 - C}{B^2 + A^2} \right).$$

El cuadrado de la distancia entre (x_0, y_0) y el punto intersección:

$$d^2 = \left(\frac{B^2 x_0 - A B y_0 - A C}{B^2 + A^2} - x_0 \right)^2 + \left(y_0 + B \frac{-B y_0 - A x_0 - C}{B^2 + A^2} - y_0 \right)^2$$

$$= \frac{A^2}{(A^2 + B^2)^2} (Ax_0 + By_0 + C)^2 + \frac{B^2}{(A^2 + B^2)^2} (Ax_0 + By_0 + C)^2$$

$$= \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}$$

de donde tomando raíz cuadrada a ambos miembros se obtiene:

$$d = d(P, R) = \frac{\sqrt{(Ax_0 + By_0 + C)^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2.14 Distancia entre dos rectas paralelas

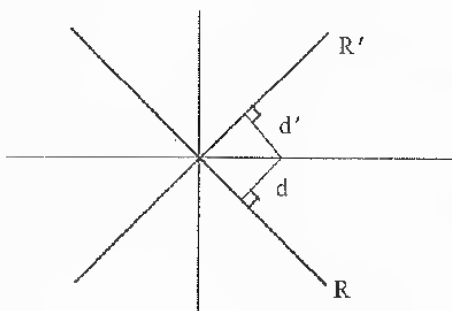
Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas se puede usar la fórmula anterior donde P es un punto cualquiera sobre una de las rectas y R la otra recta. Si las ecuaciones de las rectas son $R_1: Ax + By + C_1 = 0$ y $R_2: Ax + By + C_2 = 0$, a partir de la fórmula de distancia de un punto a una recta se demuestra que la distancia entre ellas viene dada por:

$$d(R_1, R_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2.15 Ecuación de las bisectrices de los ángulos entre dos rectas

Sean $R: Ax + By + C = 0$
 $R': A'x + B'y + C' = 0$, dos rectas no paralelas.

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de sus lados. Entre dos rectas tenemos dos ángulos suplementarios, luego dos bisectrices.



Siendo $P(x, y)$ un punto arbitrario de dicho lugar geométrico tenemos:

$$d' = d(P, R') = d(P, R) = d.$$

Luego, usando la fórmula de distancia de un punto a una recta se deduce que las ecuaciones de las bisectrices son:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{(A')^2 + (B')^2}}$$

2.16 Área de un triángulo

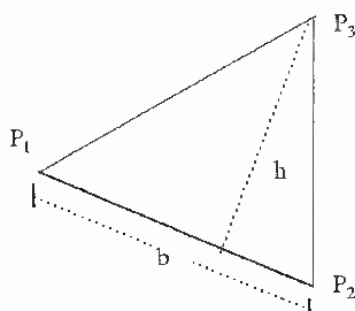
Dados los vértices de un triángulo $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ su área viene dada por:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Prueba:

Los tres puntos no son colineales, es decir, no están sobre una misma recta.

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}bh,$$



$$\text{donde } b = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Calculemos ahora h:

la ecuación de la recta "base" es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

que se puede escribir de la forma

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y - x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0, \text{ si } x_1 \neq x_2;$$

$$\text{asi } h = \frac{|x_3(y_1 - y_2) + y_3(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{1}{2} |x_3(y_1 - y_2) + y_3(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Si $x_1 = x_2$, tomamos como base para el triángulo otro de los lados.

2.17 Definición de circunferencia

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

2.18 Ecuación de la circunferencia

Sea $P(x, y)$ un punto arbitrario de la circunferencia de radio r y centro $C(h, k)$, por lo tanto

$$d(P, C) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

de donde

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Desarrollando la ecuación y poniendo $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2$ de una circunferencia se puede escribir de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

Recíprocamente, completando cuadrados en esta última

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) + F - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} = 0,$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4},$$

es una circunferencia si $D^2 + E^2 - 4F > 0$. Su centro es $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

EJERCICIOS RESUELTOS

2.1 Halle la ecuación de las rectas que cumplen las condiciones dadas:

a) Pasa por $(-5,3)$ y tiene pendiente 4.

Se conoce un punto por el cual pasa y su pendiente, por lo tanto, su ecuación será $(y-3) = 4(x-(-5))$, que escrita en la forma general es $4x - y + 23 = 0$.



b) Pasa por $(2,2)$ y $(-1,3)$.

Se conocen dos puntos, por lo tanto su ecuación será $y-2 = \frac{3-2}{-1-2}(x-2)$, o sea, $y-2 = -\frac{1}{3}(x-2)$, que escrita en la forma general es $x + 3y - 8 = 0$.



c) Tiene pendiente 5 y corta el eje OY en -3 .

Se conoce la pendiente y la intersección con el eje OY, por lo tanto su ecuación es $y = 5x - 3$.



d) Pasa por $(-4,2)$ y es paralela a $2x + 4y - 1 = 0$.

Por ser paralela tiene la misma pendiente de la recta dada $m = -\frac{1}{2}$. Se conoce ahora un punto por el cual pasa y su pendiente, luego su ecuación es $x + 2y = 0$.

e) Pasa por $(-6,-3)$ y tiene ángulo de inclinación 135° .

Su ecuación es $y+3 = \operatorname{tg}135^\circ(x+6)$, o sea $y+3 = -(x+6)$.



2.2 Halle los valores de k para que las rectas $k^2x + y + 2 = 0$ y $(k-1)x - 3ky = 0$ sean perpendiculares.

Las rectas tienen pendientes $m_1 = -k^2$ y $m_2 = \frac{k-1}{3k}$, respectivamente. Como son perpendiculares $m_1 \cdot m_2 = -1$, de donde se obtiene la ecuación de 2º grado $k^2 - k - 3 = 0$ cuyas soluciones son $k = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ y para cuyos valores las rectas cumplen la condición pedida. Con $k=0$, $y = -2$ y $x=0$, que también son perpendiculares.



2.3 Hallar las ecuaciones de las rectas paralelas a $5x + 12y - 12 = 0$ y que distan de ella 4 unidades.

Existen varias formas de resolver este problema. Como las rectas deben ser paralelas a la dada tienen pendiente $m = -\frac{5}{12}$; conociendo un punto sobre ellas podemos dar sus ecuaciones:

Supongamos que el punto es (x_0, y_0) , luego usando la fórmula de distancia de un punto a una recta se puede escribir: $\frac{|5x_0 + 12y_0 - 12|}{\sqrt{5^2 + (12)^2}} = 4 \Rightarrow |5x_0 + 12y_0 - 12| = 52$. Hay dos posibilidades geométricas de ubicación para

el punto (x_0, y_0) respecto de la recta dada: que esté por "encima" o que esté por "debajo"; lo anterior genera las siguientes dos ecuaciones:

a) $5x_0 + 12y_0 - 12 = 52$ y b) $5x_0 + 12y_0 - 12 = -52$,

Solución de a)

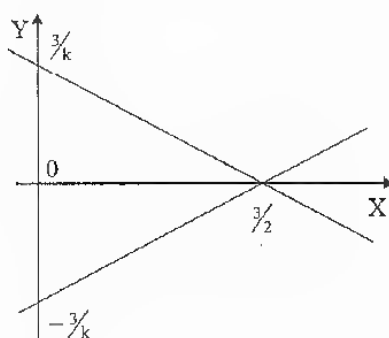
$y_0 = \frac{64-5x_0}{12}$, o sea que el punto es $(x_0, \frac{64-5x_0}{12})$. Se puede dar un valor arbitrario a x_0 , digamos $x_0 = 0^1$, para el cual $y_0 = \frac{64}{12}$. La ecuación de la recta es $y - \frac{64}{12} = -\frac{5}{12}(x-0)$, o sea, $5x + 12y - 64 = 0$.

Solución de b):

$y_0 = \frac{-40-5x_0}{12}$, o sea que el punto es $(x_0, \frac{-40-5x_0}{12})$. Igual que antes, se puede dar un valor a x_0 , digamos $x_0 = 0$, para el cual $y_0 = -\frac{40}{12}$. La ecuación de la recta es $y + \frac{40}{12} = -\frac{5}{12}(x-0)$, o sea, $5x + 12y + 40 = 0$.



2.4 Hallar el valor de k para que la recta $2x + ky - 3 = 0$ forme con los ejes de coordenadas triángulos de área igual a 5.



La recta intercepta el eje OY en el punto $(0, \frac{3}{k})$ y el eje OX en el punto $(\frac{3}{2}, 0)$.

El área del triángulo formado entre la recta y los ejes de coordenadas es

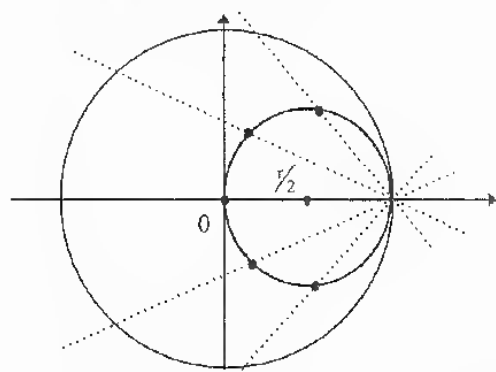
$$A = \frac{1}{2} \text{ base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left| \frac{3}{k} \right| = 5,$$

de donde $|k| = \frac{9}{20} \Rightarrow k = \pm \frac{9}{20}$.



2.5 Dada una circunferencia, desde un punto cualquiera de ella se trazan cuerdas. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de dichas cuerdas.

Sin pérdida de generalidad, se puede trabajar con la circunferencia de centro en el origen y radio r :



$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Elijamos el punto desde el cual se trazan las rectas como $(r, 0)$ y sea (x_1, y_1) el punto de intersección de las rectas con la circunferencia, luego $x_1^2 + y_1^2 = r^2$. El punto medio de cada cuerda será:

$$x = \frac{x_1 + r}{2} \quad y = \frac{y_1}{2},$$

de donde $x_1 = 2x - r$ y $y_1 = 2y$, luego:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \Rightarrow (2x - r)^2 + (2y)^2 = r^2 \Rightarrow 4\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + 4y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}, \text{ circunferencia de centro } \left(\frac{r}{2}, 0\right) \text{ y radio } \frac{r}{2}.$$

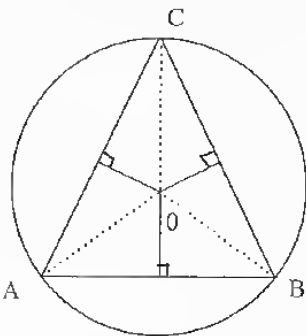


2.6 Ejercicios sobre triángulos

a) Probar que las mediatrices de los lados de un triángulo se interceptan en un punto que equidista de los vértices. Este punto se llama *circuncentro*.

¹Se pudiera hacer las operaciones siguientes con x_0 , los resultados serían los mismos.

Consideremos cualquier triángulo de vértices A, B y C. Es claro que las mediatrices de los lados \overline{AB} y \overline{AC} se interceptan en un punto interior al triángulo, llamemos O a este punto. Por la definición de mediatriz se sabe que:



$$\overline{OA} = \overline{OC} \quad \text{y} \quad \overline{OA} = \overline{OB} \Rightarrow \overline{OC} = \overline{OB},$$

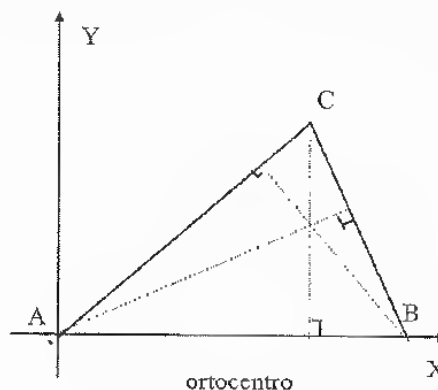
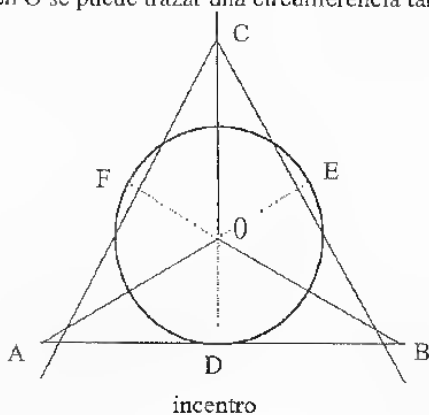
por lo tanto, O está sobre la mediatriz del lado \overline{BC} y a igual distancia de los vértices del triángulo, luego O es el centro de la circunferencia (*circunscrita*) que pasa por los vértices. ☑

b) Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo se interceptan en un punto que equidista de los lados. Este punto se llama *incentro*.

Consideremos un triángulo de vértices A, B y C. Las bisectrices de los ángulos con vértices A y B se interceptan en un punto interior, llamémoslo O. Tenemos por la definición de bisectriz que (ver figura adjunta)

$$\overline{OD} = \overline{OF} \quad \text{y} \quad \overline{OD} = \overline{OE} \Rightarrow \overline{OF} = \overline{OE},$$

por lo cual O está sobre la bisectriz del ángulo con vértice C y a igual distancia de los lados del triángulo. Con centro en O se puede trazar una circunferencia tangente a los lados del triángulo, ésta se llama circunferencia *inscrita*. ☑



c) Probar que las alturas de un triángulo o sus prolongaciones se interceptan en un punto. Este punto se llama *ortocentro*.

Sin pérdida de generalidad se puede considerar el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(x_1, 0)$ y $C(x_2, y_2)$ $x_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, (ver figura adjunta).

Basta probar que la abscisa del punto intersección de las alturas trazadas por los vértices A y B es x_2 , ya que la altura trazada por el vértice C tiene ecuación $x = x_2$.

La altura trazada desde A al lado \overline{BC} y la altura trazada de B al lado \overline{AC} tienen ecuaciones, respectivamente:

$$y = -\frac{x_2 - x_1}{y_2} x \quad \text{y} \quad y = -\frac{x_2}{y_2} (x - x_1),$$

que se interceptan para $x = x_2$.

En el caso $x_1 = x_2$ tenemos un triángulo rectángulo y el ortocentro sería el vértice del ángulo recto. ☑

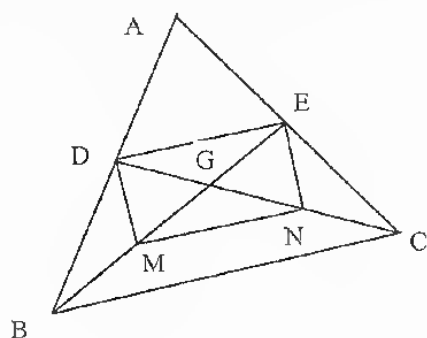
d) Probar que si los vértices de un triángulo son los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$, las **medianas** se intersectan en un punto de coordenadas

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

El punto de intersección se llama *centro de gravedad o baricentro* y está situado a $\frac{2}{3}$ del vértice sobre la mediana.

Probemos primeramente que las medianas se interceptan en un punto G situado a $\frac{2}{3}$ del vértice sobre la mediana:

Dos medianas se intersectan en un punto que designaremos por G, debido a que no son rectas paralelas. Sean M y N los puntos medios de los segmentos \overline{BG} y \overline{CG} , respectivamente. \overline{DE} es paralelo al lado \overline{BC} y, además, $2\overline{DE} = \overline{BC}$ (véase el problema propuesto N° 4). Tomemos ahora el $\triangle BGC$, por ser M y N puntos medios de los lados tenemos igualmente que el segmento \overline{MN} es paralelo a \overline{BC} y, además, $2\overline{MN} = \overline{BC}$. Luego:



$$* \overline{DE} \parallel \overline{MN} \text{ y } \overline{DE} = \overline{MN},$$

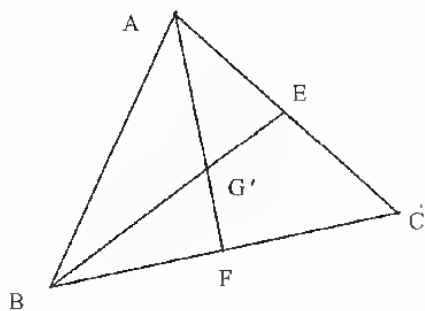
cuyas diagonales se intersectan en el punto medio, es decir, G. Luego, $\overline{MG} = \overline{EG}$; Por ser M el punto medio del segmento BG resulta

$$\overline{BM} = \overline{MG} = \overline{GE},$$

o sea

$$\overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BE}.$$

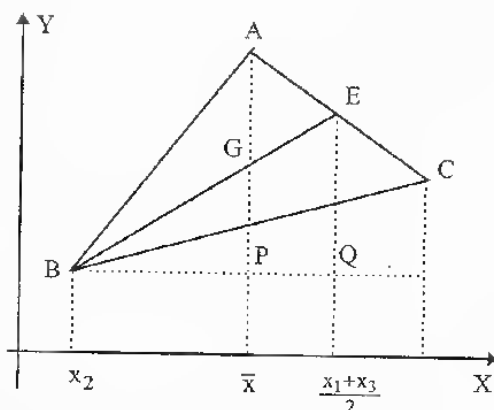
En forma similar el segmento \overline{BE} queda dividido por la mediana \overline{AF} en dos segmentos tales que $\overline{BG'} = \frac{2}{3} \overline{BE}$, luego $G = G'$. Podemos concluir que las medianas concurren en el punto G situado a $\frac{2}{3}$ de cada vértice.



Nota: Se puede hacer la demostración anterior usando coordenadas (analíticamente), tomando un triángulo con vértices $(0,0)$, $(a,0)$ y (b,c) .

Probemos ahora que $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ y $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$:

Asignemos entonces a los puntos del plano A, B y C las coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , respectivamente, y sean (\bar{x}, \bar{y}) las de G. Por ser E el punto medio del lado \overline{AC} sus coordenadas son $\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$. En la figura adjunta el $\triangle BPG$ y el $\triangle BQE$ son semejantes por lo cuál,



$$\frac{\overline{BG}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}},$$

$$\text{o sea } \frac{2}{3} = \frac{\bar{x} - x_2}{\frac{x_1 + x_3}{2} - x_2},$$

$$\text{de donde, despejando, se obtiene } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

De igual forma, bajo los mismos argumentos, y proyectando sobre el eje OY se obtiene $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.



2.7 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2, -2)$, $(-1, 4)$ y $(4, 6)$.

Toda circunferencia se puede escribir de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, por lo cual si sustituimos las coordenadas de los puntos dados tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas D, E y F.

$$\text{Para } (2, -2) \quad 2D - 2E + F = -8,$$

$$\text{Para } (-1, 4) \quad -D + 4E + F = -17$$

$$\text{Para } (4, 6) \quad 4D + 6E + F = -52$$

Se usa la regla de Cramer para resolver este sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -36, \text{ como } \Delta \neq 0 \text{ el sistema tiene una única solución.}$$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -2 & 1 \\ -17 & 4 & 1 \\ -52 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-8 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -17 & 1 \\ -52 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -17 & 4 \\ -52 & 6 \end{vmatrix}}{-36} = -\frac{16}{3};$$

$$E = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 \\ -1 & -17 & 1 \\ 4 & -52 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2 \begin{vmatrix} -17 & 1 \\ -52 & 1 \end{vmatrix} - (-8) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -17 \\ 4 & -52 \end{vmatrix}}{-36} = -\frac{25}{6};$$

$$F = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -8 \\ -1 & 4 & -17 \\ 4 & 6 & -52 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2 \begin{vmatrix} 4 & -17 \\ 6 & -52 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & -17 \\ 4 & -52 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-36} = -\frac{17}{3}.$$

Sustituyendo tenemos que la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos dados es

$$6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0.$$

¿Puede usted resolver el problema de otra forma?



2.8 Dadas las rectas de ecuaciones $x - 2y - 10 = 0$ y $x + 2y + 6 = 0$, hallar los ángulos formados por ellas.

Las rectas tienen pendientes $m_1 = -\frac{1}{2}$ y $m_2 = \frac{1}{2}$, correspondiendo el mayor ángulo de inclinación a la de pendiente m_1 , por lo tanto el ángulo θ entre ellas es tal que: $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = -\frac{4}{3}$ de donde $\theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) \approx -53,13010235$ grados decimales, que convertido a un ángulo en $[0, \pi)$ es $\theta = 126,8698976$ grados decimales $= 126^\circ 52' 11.6''$ en notación sexagesimal. El otro ángulo entre las rectas es suplementario, es decir, $\theta' = 180^\circ - 126^\circ 52' 11.6'' = 53^\circ 7' 48.4''$.



2.9 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -1)$ y determina un segmento de 5 unidades de longitud comprendido entre las rectas $x - 2y + 5 = 0$ y $x - 2y + 4 = 0$.

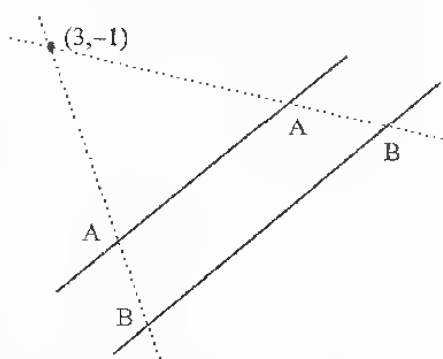
Observe que las rectas son paralelas. El *haz de rectas* que pasa por el punto $(3, -1)$ tiene ecuación $y + 1 = m(x - 3)$, se debe encontrar cuál de éstas intersecta las rectas definiendo entre ellas un segmento de longitud 5, para ello se hallan los puntos intersección:

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y + 1 = m(x - 3) \end{cases} \text{ cuya solución es } A\left(-\frac{6m+7}{1-2m}, -\frac{8m+1}{1-2m}\right).$$

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ y + 1 = m(x - 3) \end{cases} \text{ cuya solución es } B\left(-\frac{6m+6}{1-2m}, -\frac{7m+1}{1-2m}\right).$$

Ahora se quiere que

$$d(A, B) = \sqrt{\left(-\frac{6m+7}{1-2m} + \frac{6m+6}{1-2m}\right)^2 + \left(-\frac{8m+1}{1-2m} + \frac{7m+1}{1-2m}\right)^2} = 5,$$



de donde $\sqrt{\frac{m^2 + 1}{1 - 4m + 4m^2}} = 5$, que elevando al cuadrado y simplificando resulta la ecuación de 2º grado $99m^2 - 100m + 24 = 0$, cuyas soluciones son $m_1 = \frac{50 + 2\sqrt{31}}{99}$ y $m_2 = \frac{50 - 2\sqrt{31}}{99}$. Las ecuaciones de las rectas son:

$$y + 1 = m_1(x - 3)$$

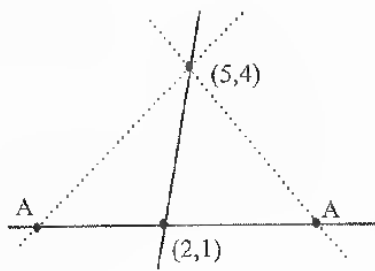
y

$$y + 1 = m_2(x - 3).$$



2.10 Dadas las rectas de ecuaciones $y - 1 = 0$ y $x - y - 1 = 0$, hallar las ecuaciones de las rectas que forman con las rectas dadas triángulos de área 6, sabiendo que interceptan la recta $x - y - 1 = 0$ en el punto $(5, 4)$.

La familia de rectas que pasa por el punto $(5, 4)$ tiene ecuación $y - 4 = m(x - 5)$, se debe encontrar la pendiente m de forma que satisfaga lo pedido en el problema. Calculemos las intersecciones de las rectas, que son los vértices del triángulo:



$$\begin{cases} y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } (2, 1).$$

$$\begin{cases} y-1=0 \\ y-4=m(x-5) \end{cases} \quad \text{cuya solución es } A\left(\frac{5m-3}{m}, 1\right),$$

estos puntos y el $(5,4)$ son los vértices del triángulo. El otro dato es que el área del triángulo es 6, lo que permite escribir la siguiente ecuación:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ \frac{5m-3}{m} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -\frac{5m-3}{m} & 1 & 1 \\ \frac{5m-3}{m} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| \frac{5m-3}{m} \right| = 6 \quad \text{o bien} \quad \left| \frac{-9m+9}{m} \right| = 12,$$

la cual a su vez es equivalente a las siguientes dos ecuaciones:

$$\text{i) } \frac{-9m+9}{m} = 12 \Rightarrow m = \frac{3}{7},$$

$$\text{ii) } \frac{-9m+9}{m} = -12 \Rightarrow m = -3.$$

Sustituyendo estos valores de la pendiente m se tienen las rectas solución:

$$3x-7y+12=0 \quad \text{y} \quad 3x+y-19=0.$$



2.11 Dadas la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y la recta de ecuación $2x - y + k = 0$, hallar los valores de k para los cuales:

- La recta intercepta la circunferencia en dos puntos.
- La recta es tangente a la circunferencia.
- La recta no intercepta la circunferencia.

El problema geométrico de intersección de dos curvas corresponde analíticamente a la resolución de un sistema de ecuaciones, donde éstas son las ecuaciones que describen las curvas, en este caso:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x - y + k = 0 \end{cases}$$

El sistema es no lineal (las ecuaciones no son todas de primer grado) por lo cual se debe resolver por sustitución. Se reemplaza $y = 2x + k$ en la primera para obtener una ecuación de segundo grado en x :

$$x^2 + (2x+k)^2 = 16 \Rightarrow 5x^2 + 4kx + (k^2 - 16) = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son las abscisas de los puntos intersección entre las dos curvas, y como se debe saber una ecuación de segundo grado puede tener dos, una o ninguna solución de acuerdo sea el discriminante asociado,

$D = -4k^2 + 320$, positivo, nulo o negativo, respectivamente:

$$\text{i) } D = -4k^2 + 320 > 0 \quad \text{si y sólo si } k^2 < 80 \Leftrightarrow k \in (-4\sqrt{5}, 4\sqrt{5}).$$

Para los valores de k en el intervalo anterior la recta intersecta la circunferencia en dos puntos.

$$\text{ii) } D = -4k^2 + 320 = 0 \quad \text{si y sólo si } k^2 = 80 \Leftrightarrow k = \pm 4\sqrt{5}.$$

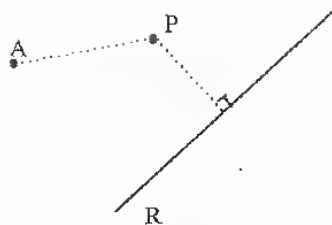
Para estos valores de k la recta es tangente.

$$\text{iii) } D = -4k^2 + 320 < 0 \quad \text{si y sólo si } k^2 > 80 \Leftrightarrow k \in (-\infty, -4\sqrt{5}) \cup (4\sqrt{5}, +\infty).$$

Con k variando en esta unión de intervalos la recta no intersecta la circunferencia.



2.12 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que el cuadrado de su distancia al punto $A(2,1)$ es igual al doble de su distancia a la recta $R: 4x - 3y - 1 = 0$.



Sea $P(x,y)$ cualquier punto de ese lugar geométrico, entonces se tiene $(d(A,P))^2 = 2d(P,R)$, es decir,

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \frac{|4x-3y-1|}{\sqrt{4^2+3^2}},$$

o bien,

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{2}{5}|4x-3y-1|; \text{ esta ecuación es equivalente,}$$

dependiendo si P está por "encima" o por "debajo" de la recta R, a

$$\text{i) } (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{2}{5}(4x-3y-1) \quad \text{ii) } (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{2}{5}(-4x+3y+1)$$

Solución de i):

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{2}{5}(4x-3y-1) \Leftrightarrow 5x^2 - 28x + 5y^2 - 4y = -27$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x^2 - \frac{28}{5}x\right) + 5\left(y^2 - \frac{4}{5}y\right) = -27$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x^2 - \frac{28}{5}x + \frac{784}{100} - \frac{784}{100}\right) + 5\left(y^2 - \frac{4}{5}y + \frac{16}{100} - \frac{16}{100}\right) = -27$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{14}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{13}{5},$$

el lugar geométrico es una circunferencia de centro $\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{13}{5}}$.

Solución de ii):

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{2}{5}(-4x+3y+1) \Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 5y^2 - 16y = -23$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x^2 - \frac{12}{5}x\right) + 5\left(y^2 - \frac{16}{5}y\right) = -23$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{144}{100} - \frac{144}{100}\right) + 5\left(y^2 - \frac{16}{5}y + \frac{256}{100} - \frac{256}{100}\right) = -23$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x - \frac{12}{10}\right)^2 + 5\left(y - \frac{16}{10}\right)^2 = -3,$$

este caso no corresponde a ningún lugar geométrico.



EJERCICIOS PARA SER RESUELTOS POR EL ESTUDIANTE

1.- Halle la ecuación de las rectas que cumplen las condiciones dadas:

- 1.1 Pasa por el punto $(2, -2)$ y tiene pendiente 10.
- 1.2 Pasa por el punto $(-3, 1)$ y tiene pendiente -5 .
- 1.3 Pasa por los puntos $(-1, 5)$ y $(0, 3)$.
- 1.4 Pasa por el punto $(1, -1)$ y es paralela a la recta $2x + y - 1 = 0$.
- 1.5 Pasa por el punto $(4, -2)$ y es perpendicular al segmento que une los puntos $(-3, 2)$ y $(4, 5)$.
- 1.6 Pasa por el punto $(8, -3)$ y tiene ángulo de inclinación 120° .
- 1.7 Sus intersecciones con los ejes de coordenadas son los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.
- 1.8 Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos $(3, 5)$ y $(-1, 3)$.

2.- Cada una de las ecuaciones a) y b) es una familia de rectas. ¿Cuál es la característica común a cada una de las familias?

a) $y - 3 = m(x + 2)$ y b) $y = 3x + b$

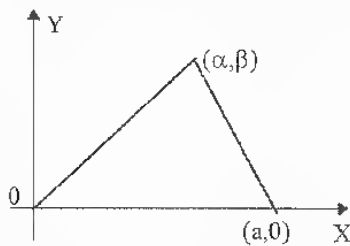
3.-Halle los valores de k (si existen) para que las rectas $k^2x + (k+1)y + 3 = 0$ y $3x - 2y - 11 = 0$:

3.1 sean paralelas

3.2 sean perpendiculares

3.3 se intercepten en el punto $(\frac{11}{3}, 0)$.

4.- Demostrar que para cualquier triángulo se satisface lo siguiente:



a) La recta que une los puntos medios de dos lados es paralela al tercer lado.

b) La longitud del segmento que une los puntos medios de dos lados es igual a la mitad de la longitud del lado con el cual es paralelo.

Nota: Trabaje con el triángulo de la figura anexa.

5.- Demuestre que en todo trapecio, el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos es:

a) Paralelo a las bases.

b) De longitud es igual a la semi-suma de la longitud de las bases.

6.-Halle la distancia del punto $(4,6)$ a la recta de ecuación $-x + y - 1 = 0$.

7.-Halle los puntos sobre la recta $2x + 3y - 1 = 0$ que están a una distancia de 3 unidades de la recta $-x + 2y + 3 = 0$.

8.-Halle la distancia comprendida entre las rectas $x + 2y - 9 = 0$ y $-2x - 4y + 5 = 0$.

9.- Halle las ecuaciones de las rectas paralelas a $2x - y + 3 = 0$ que distan de ella 5 unidades.

10.-Demuestre que las bisectrices de los ángulos entre dos rectas son perpendiculares.

11.-Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $(-2,1)$, $(3,4)$ y $(5,-2)$.

12.-Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $x + y + 1 = 0$ y $2x - y + 1 = 0$, y compruebe que son perpendiculares.

13.-

13.1 Encontrar las ecuaciones de las rectas que pasan por $(2,7)$ y forman ángulos de $\frac{\pi}{4}$ con la recta que pasa por $(-1,7)$ y $(8,-2)$.

13.2 El mismo ejercicio con $\frac{\pi}{3}$.

14.- Calcular el área y el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos $(1,3)$, $(2,1)$ y $(-2,4)$.

15.-Hallar la ecuación de recta que pasa por el punto $(-1,0)$ y que forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área 4.

Nota: Usted puede deducir la respuesta a partir de un dibujo, pero hágalo también en forma analítica.

16.- Hallar la ecuación de la recta paralela a $2x - 3y + 1 = 0$ y que forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área 4.

17.-Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0,3)$ a igual distancia de los puntos $(-1,5)$ y $(7,3)$.

18.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ y que determina un segmento de 1 unidad de longitud comprendido entre las rectas $2x + 3y - 1 = 0$ y $2x + 3y = 0$.

19.- Dadas las circunferencias cuyas ecuaciones son:

19.1 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ 19.2 $3x^2 + 3y^2 - 6y - 1 = 0$

19.3 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ 19.4 $4x^2 + 4y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$,

hallar su centro y su radio.

20.- Dar la ecuación de la circunferencia con centro en $(2, 7)$ y radio 5.

21.- Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(-2, 1)$ y pasa por el punto $(5, 7)$.

22.- Hallar la ecuación de las circunferencias que pasan por los puntos $(1, 4)$ y $(-1, 2)$ y tienen radio 5.

23.- Una circunferencia pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(-1, 3)$ y su centro está sobre la recta de ecuación $3x - y - 2 = 0$. Hallar su ecuación.

24.- Determinar, analíticamente, que una circunferencia y una recta pueden tener las siguientes posiciones relativas:

- i) No se interceptan.
- ii) Su intersección es un único punto.
- iii) Su intersección son dos puntos.

25.- Determinar la posición relativa entre la recta y la circunferencia cuyas ecuaciones son las siguientes:

25.1 $x^2 + y^2 = 1$, $y = 2x - 1$

25.2 $x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$, $x - \sqrt{2}y - 1 = 0$

25.3 $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$, $x - 2y + 20 = 0$.

26.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ en el punto $(2, 1)$.

27.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, tales que:

27.1 sean paralelas a la recta $2x + y - 7 = 0$

27.2 sean perpendiculares a la recta $x - 2y + 9 = 0$.

28.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ que pasan por el punto $(1, 6)$.

29.- Hallar el incentro del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $y = -\sqrt{3}x + 5$, y la ecuación de la circunferencia inscrita.

30.- Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(2, \frac{9}{4})$ y $(5, 0)$.

31.- Probar que un triángulo inscrito en una circunferencia y que tiene como uno de sus lados el diámetro es rectángulo.

32.- Probar que la mediatriz a una cuerda de la circunferencia pasa por el centro.

33.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a las rectas $3x - y + 4 = 0$ y $x + 3y - 7 = 0$ es siempre igual a 2.

34.- Hallar el punto de la parábola $y^2 = 32x$ cuya distancia a la recta $4x + 3y + 10 = 0$ sea igual a 2.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS IMPARES

1.1 $10x - y - 22 = 0.$

1.3 $2x + y - 3 = 0.$

1.5 $7x + 3y - 22 = 0.$

1.7 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

3.1 No existe.

3.3 No existe.

7 $\left(\frac{11 \pm 9\sqrt{5}}{7}, \frac{-5 \pm 6\sqrt{5}}{7} \right).$

9 $2x - y + 3 \pm 5\sqrt{5} = 0.$

11 $77^\circ 28' 16.29'' ; 54^\circ 9' 44.25'' ; 48^\circ 21' 59.26''$

13.1 $y = 7 ; x = 2.$

13.2 $(1 + \sqrt{3})y + (-1 + \sqrt{3})x - 7(1 + \sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3}) = 0$ y $(1 - \sqrt{3})y - (1 + \sqrt{3})x - 7(1 - \sqrt{3}) + 2(1 + \sqrt{3}) = 0.$

15 $8x - y + 8 = 0 ; 8x + y + 8 = 0$

17 $x - 3y + 9 = 0 ; x + 4y - 12 = 0.$

19.1 $(1, -3)$ y $2.$

19.3 $(2, -1)$ y $\sqrt{2}.$

21 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 80 = 0.$

23 $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0.$

25.1 Puntos de intersección: $(0, -1) ; \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right).$

25.3 No se intersectan.

27.1 $2x + y \pm 5 = 0.$

29 $\left(\frac{5}{3 + \sqrt{3}}, \frac{5}{3 + \sqrt{3}} \right) ; \left(x - \frac{5}{3 + \sqrt{3}} \right)^2 + \left(y - \frac{5}{3 + \sqrt{3}} \right)^2 = \frac{25}{(3 + \sqrt{3})^2}.$

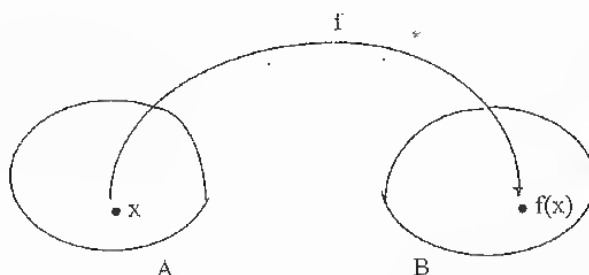
33 $\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{4}{5}.$

3 FUNCIONES Y SUS GRÁFICOS

Se usa el término "función" para denotar la dependencia de una cantidad con respecto a otra y fue introducido por el matemático alemán Gottfried Leibniz (1646 - 1716).

3.1 Definición

Una función es una regla de correspondencia f que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B .



El elemento que f asocia con x se denota por el símbolo $f(x)$, (léase "f de x"), se llama **imagen de x mediante f** , o bien, en el caso de que A y B sean subconjuntos de números reales, **valor de f en x** . Al conjunto A se le llama **dominio de la función f** . Cuando A y B son subconjuntos de \mathbb{R} , éste es el caso que trabajaremos en estas notas, la regla de correspondencia se denota mediante la ecuación $y = f(x)$, sin especificar el conjunto A , en este caso se sobreentenderá que el dominio de f , que denotaremos por $D(f)$, es el mayor subconjunto de números reales para los cuales la ecuación $y=f(x)$ tiene sentido en \mathbb{R} . Usualmente se conoce a x como **variable independiente** e y como **variable dependiente**. Al conjunto de todos los posibles valores que toma $f(x)$ cuando x varía en el dominio se le llamará **rango de f** y lo denotaremos por $R(f)$. El conjunto de pares ordenados $G(f) = \{(x,y) / x \in D(f), y=f(x)\}$ recibe el nombre de **gráfico de f** y le corresponde un conjunto de puntos en el plano, su representación gráfica.

3.2 Igualdad de funciones

Dos funciones f y g son iguales si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- a) $D(f) = D(g) = D$
- b) $f(x) = g(x) \quad \forall x \in D$.

3.3 Álgebra de funciones

Dadas dos funciones f y g con dominios $D(f)$ y $D(g)$, respectivamente, se define las siguientes operaciones:

Suma algebraica

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$D(f \pm g) = D(f) \cap D(g)$$

Producto

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

División

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D(f/g) = D(f) \cap \{x: x \in D(g) \text{ y } g(x) \neq 0\}$$

3.4 Definición de sucesión

Una **sucesión** es una función que tiene como dominio un subconjunto de los números naturales, es decir,

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow f(n). \end{aligned}$$

El rango o recorrido de estas funciones (sucesiones) se acostumbra denotar por $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Al número a_1 se le llama primer término de la sucesión, a_2 al segundo, etc. y a_n al término enésimo o término general.

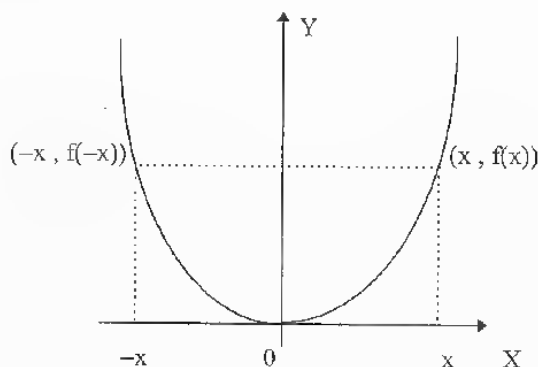
3.5 Definición

Un conjunto D de números reales es simétrico respecto del origen si y sólo si para cada $x \in D$ se tiene que $-x \in D$.

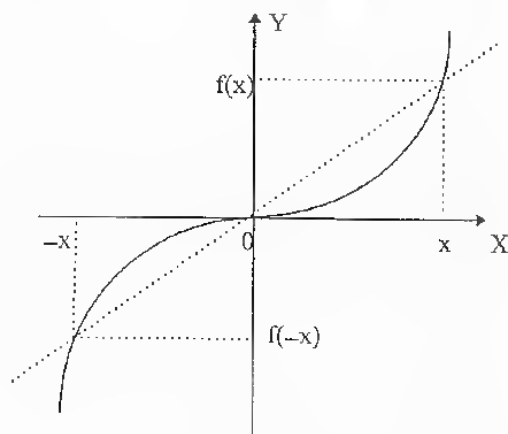
3.6 Paridad e imparidad

Sea f una función con dominio $D(f)$ simétrico respecto del origen.

- i) f es par si y sólo si $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D(f)$.
- ii) f es impar si y sólo si $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D(f)$.



Función Par: el gráfico de f es simétrico respecto del eje OY .



Función Impar: el gráfico de f es simétrico respecto del origen.

El producto y el cociente de dos funciones pares o de dos impares es una función par. El producto y el cociente de una función par y otra impar es una función impar (ejercicio 9 propuesto).

Otro resultado que se debe tener en cuenta es el demostrado en el ejercicio 3.7: si f es impar y $0 \in D(f)$ entonces $f(0)=0$.

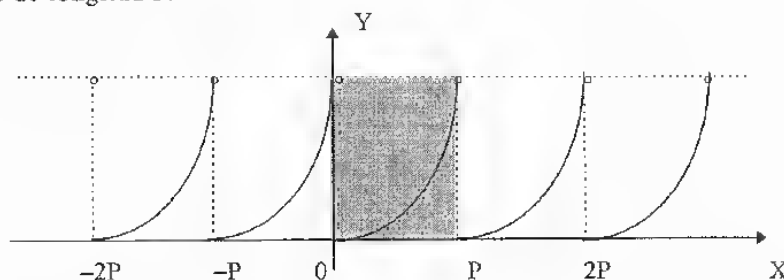
3.7 Función periódica

Una función es periódica si existe un $P > 0$ tal que

$$f(x) = f(x+P) \quad \forall x \in D(f). \quad (1)$$

Todo número positivo que satisfaga la igualdad anterior se llama período de f . Al menor período se le llama **período fundamental** o principal.

La igualdad (1) dice que los valores de f se repiten cada P unidades, por lo tanto, el gráfico de f se repite a intervalos de longitud P .



Desde el punto de vista geométrico, podemos decir que el periodo principal es la longitud mínima que debe tener el intervalo en el cual se obtiene una descripción gráfica completa del comportamiento de la función.

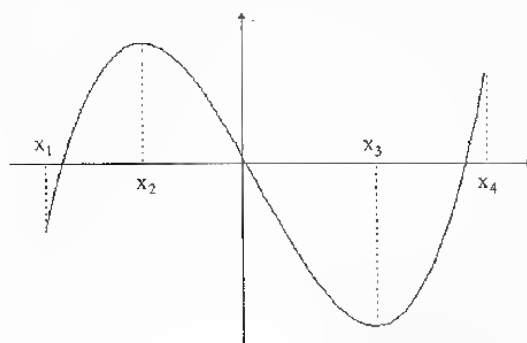
Nota: Si P es el periodo principal de una función entonces sus múltiplos positivos son periodos de la función.

3.8 Crecimiento y decrecimiento

f es creciente en un intervalo I si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in I$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f es decreciente en un intervalo I si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in I$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Para indicar que f es creciente o decreciente, usaremos los símbolos $f \uparrow$, $f \downarrow$, respectivamente.



En el ejemplo de la figura anterior $f \uparrow$ en los intervalos $[x_1, x_2]$ y $[x_3, x_4]$, $f \downarrow$ en el intervalo $[x_2, x_3]$.

3.9 Composición de funciones

La función compuesta $f \circ g$ se define por la regla de correspondencia siguiente:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Se lee " f compuesta con g " y a fines prácticos diremos que f es la función externa y g la función interna. Como se puede observar la composición $f \circ g$ tiene sentido si $g(x) \in D(f)$ para algún $x \in D(g)$, es decir si

$$D(f) \cap R(g) \neq \emptyset.$$

Dominio de la composición:

$$D(f \circ g) = \{x : x \in D(g) \text{ y } g(x) \in D(f)\},$$

En cuanto al cálculo del dominio de la función compuesta se debe alertar acerca de algunas respuestas que *generalmente resultan erróneas*:

$$1) D(f \circ g) = D(f) \cap R(g)$$

2) $D(f \circ g) = D(g)$

3) La más común: calcular $D(f \circ g)$ a partir de la expresión algebraica obtenida para $f \circ g$.

Respecto de esta última, por ejemplo, si $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = x^2$, se tiene que $(f \circ g)(x) = x$ $D(f \circ g) \neq \mathbb{R}$. La respuesta correcta es el intervalo $[0, +\infty)$.

Observe que uno de los casos fáciles es cuando el dominio de la función externa es \mathbb{R} , en tal caso $D(f \circ g) = D(g)$. En general $D(g) \supseteq D(f \circ g)$. En los ejercicios resueltos se explica y se ejemplifica un procedimiento para calcular el $D(f \circ g)$.

3.10 Función inyectiva

Se dice que f es inyectiva si y sólo si

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in D(f),$$

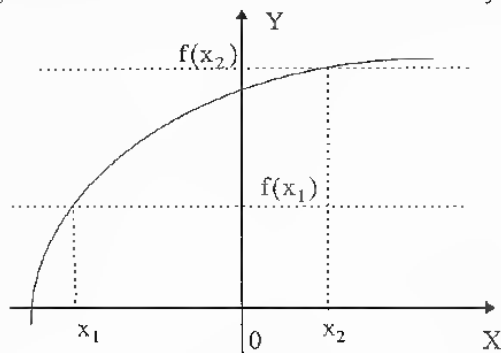
o equivalentemente

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D(f).$$

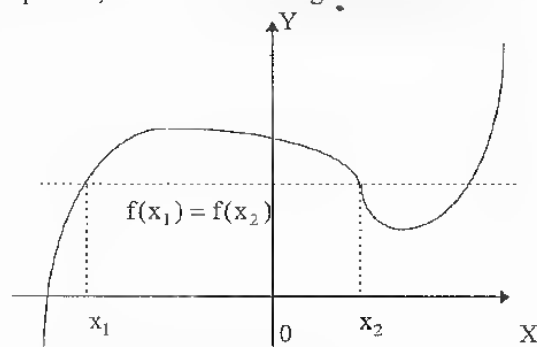
De la primera forma para la definición de inyectividad se puede observar que:

cada elemento del rango de f es imagen de un único elemento del dominio de f ,

luego cualquier recta horizontal debe intersectar el gráfico de f en un solo punto; ésta es la forma geométrica de detectar si una función es inyectiva, por supuesto, si conocemos su gráfico. Veamos:



Es inyectiva



No es inyectiva

Teniendo en cuenta la explicación geométrica anterior, es fácil observar que una función es inyectiva si la ecuación $y = f(x)$ tiene una única solución en x para cada $y \in R(f)$.

3.11 Teorema

Si f es creciente (decreciente) en su dominio entonces f es inyectiva.

3.12 Función inversa

Supongamos que f es inyectiva, esto es, cada elemento $b \in R(f)$ es imagen de un único $a \in D(f)$; luego podemos definir una función:

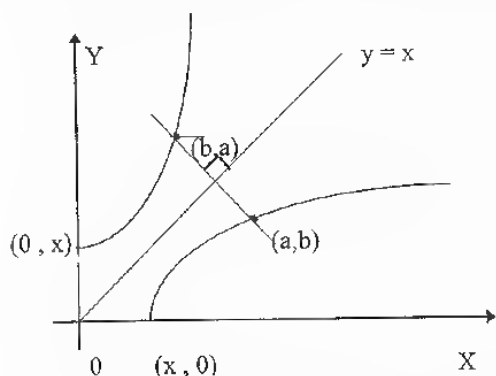
$$g: R(f) \longrightarrow D(f) \quad \text{tal que} \quad g(b) = a.$$

Tenemos entonces que:

- * Si $(a, b) \in G(f)$ entonces $(b, a) \in G(g)$
- * $f(g(b)) = b$ para cada elemento b del dominio de g .

$$* g(f(a)) = a \quad " \quad " \quad " \quad a \quad " \quad " \quad f.$$

Se dice que g es la función inversa de f que se denota por f^{-1} ; bajo esta notación y con base en lo anterior, podemos afirmar que f y f^{-1} son inversas si:



$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in D(f^{-1})$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D(f)$$

El hecho de que $(a,b) \in G(f) \Rightarrow (b,a) \in G(f^{-1})$ significa geométicamente que los gráficos de f y de f^{-1} son simétricos respecto de la recta $y = x$.

$$\text{Además: } D(f) = R(f^{-1}) \quad \text{y} \quad R(f) = D(f^{-1}).$$

Si una función $f(x)$ tiene inversa f^{-1} , se obtiene la expresión algebraica que la define despejando x en la ecuación $y = f(x)$.

3.13 Función exponencial

En los cursos preuniversitarios les fue definida en forma algebraica la función a^x , con $a > 0$ y $a \neq 1$, para x natural, entero o racional con base en la propiedad:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Este principio básico conduce a la siguiente definición para los números naturales:

$$a^n = a^{\overbrace{1+1+\dots+1}^{n-\text{veces}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{veces}}.$$

Como la ecuación $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$ se debe satisfacer, esto lleva a la definición de $a^0 = 1$.

Pasando a los enteros, se quiere que se cumpla la ecuación $a^{-n} \cdot a^n = a^0 = 1$, lo cual lleva a definir

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Para los números racionales, se debe cumplir que $\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{n-\text{veces}} = a^{\overbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}^{n-\text{veces}}} = a$, lo cual lleva a definir

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad \text{y también se debe cumplir que } \underbrace{a^{\frac{1}{m}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{m}}}_{m-\text{veces}} = a^{\overbrace{\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}}^{m-\text{veces}}} = a^{\frac{m}{m}} = a, \quad \text{lo cual lleva a definir}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m.$$

El principio básico $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ no proporciona una manipulación algebraica, similar a las anteriores, que nos permita definir a^x cuando x es irracional. Se requieren procedimientos más elaborados para definir formalmente a^x para x irracional.

La función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, está definida para cualquier valor real de x , y su gráfico se encuentra en la página 48.

Propiedades algebraicas:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

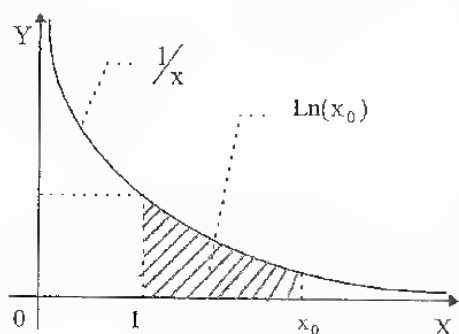
$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son positivos distintos de la unidad.}$$

3.14 Función logaritmo

Definimos la función logaritmo, como la inversa de la función exponencial:

$$y = \text{Log}_a x \quad \text{si y sólo si} \quad a^y = x \quad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$



Nota: Desde el punto de vista de rigurosidad teórica es común definir el logaritmo como el área acotada por las curvas, $y = \frac{1}{x}$, $x=1$, $x=x_0$ y el eje OX, y luego definir la función exponencial como su inversa. Se sugiere la lectura del excelente folleto [6], páginas 19 a 24, 35 y 36 una vez que haya estudiado límites, o bien, una vez que tenga conocimientos acerca de la integral el fabuloso libro [25], escrito por Spivak, capítulo 17.

Propiedades del logaritmo

$$\text{Log}_a xy = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$$

$$\text{Log}_a \frac{x}{y} = \text{Log}_a x - \text{Log}_a y$$

$$\text{Log}_a x^r = r \text{Log}_a x \quad \text{con } x, y > 0.$$

Fórmula de cambio de base: $\text{Log}_a x = \frac{\text{Log}_b x}{\text{Log}_b a}$. (Véase el ejercicio resuelto 3.33 b)

3.15 Funciones hiperbólicas

Estas funciones son combinaciones de las exponenciales e^x y e^{-x} , y aparecen con asiduidad en diversas ramas de las ciencias aplicadas. Se definen de la siguiente forma:

Seno hiperbólico

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Tangente hiperbólica

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Secante hiperbólica

$$\text{sech } x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Coseno hiperbólico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Cotangente hiperbólica

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Cosecante hiperbólica

$$\text{cosech } x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Identidades hiperbólicas

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cosh x}{2}}$$

$$\tanh \frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{1 + \cosh x}$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

$$\sinh \frac{x}{2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$$

Nota: Observe que son solamente similares a las identidades trigonométricas

3.16 Traslaciones y reflexiones

A partir de una función elemental se puede obtener otras "un tanto más complejas" con sólo tener en cuenta las implicaciones geométricas de algunos cambios de variable. Si conocemos el gráfico de $y = f(x)$ entonces respecto de éste:

	Cambio de variable
$y = f(\alpha x)$ es una dilatación si $0 < \alpha < 1$ y una contracción si $\alpha > 1$.	αx por x
$y = f(x + \alpha)$ es una traslación de α unidades hacia la izquierda si $\alpha > 0$, y es una traslación de $ \alpha $ unidades hacia la derecha si $\alpha < 0$.	$x + \alpha$ por x
$y = f(-x)$ es una reflexión respecto del eje OY.	$-x$ por x
$y = -f(x)$ es una reflexión respecto del eje OX:	
$y = f(x) + k$ es una traslación hacia arriba de k unidades si $k > 0$ y de $ k $ unidades hacia abajo si $k < 0$.	

3.17 Función implícita

Hasta ahora se ha dado las funciones definidas por una ecuación que relaciona la variable independiente x con la variable dependiente y mediante la forma $y = f(x)$, **forma explícita**. Con la función se asocia una **curva** que se llama gráfico de f ; sin embargo, existen curvas que no se pueden expresar mediante una relación explícita, al menos, en coordenadas rectangulares, como por ejemplo:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{circunferencia con centro en (0,0) y radio } r.$$

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x} \quad \text{cisoide.}$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2 y^2 \quad \text{cardioide.}$$

Muchas curvas, entre las cuales están las anteriores, se expresan con facilidad usando ecuaciones de la forma $F(x,y) = 0$, **forma implícita**; de esta última es posible, en algunos casos, despejar y como función de x , por ejemplo:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

En los casos en que sea posible, como en el ejemplo, decimos que la ecuación $F(x,y) = 0$ define implícitamente la función $y=f(x)$. Regresando al ejemplo:

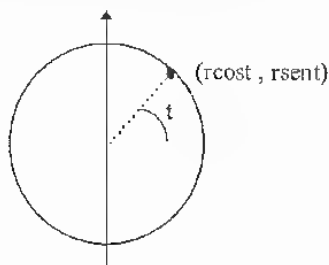
La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ define implícitamente las funciones:

$$a) \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{parte superior de la circunferencia})$$

$$b) \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{parte inferior de la circunferencia}).$$

3.18 Funciones paramétricas

En el mismo orden de ideas, siempre buscando una forma fácil y práctica de expresar las curvas, es usual para algunas la **representación paramétrica** que consiste en expresar la abscisa y la ordenada del punto (x,y) , de la curva, en función de un parámetro; por ejemplo en el caso de la circunferencia:



$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t, \end{aligned} \quad \text{donde } t \text{ (parámetro) es el ángulo de la figura.}$$

Para la cisoide:

$$x = \frac{at^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{at^3}{1+t^2}.$$

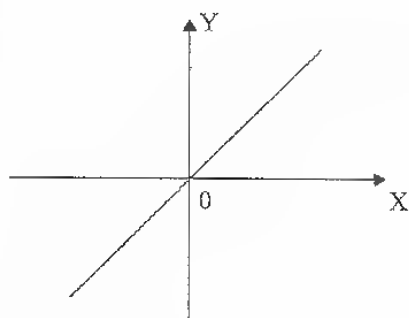
Para una hipérbola:

$$x = a \cosh t \quad \text{e} \quad y = b \sinh t.$$

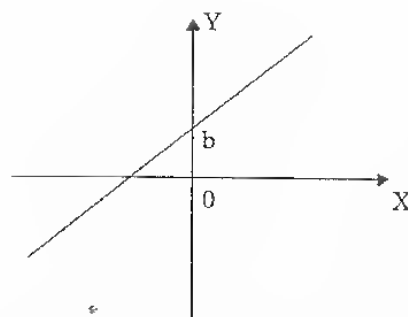
Nota: Por ahora, a título de curiosidad. A fin de resolver este problema de representación de curvas, en cursos posteriores, se introducirán otros sistemas de coordenadas distintos a las coordenadas rectangulares. Por ejemplo, en coordenadas polares, la circunferencia con centro en el origen se representa por $r(\theta)=a$ (a radio) y la cardioide por $r(\theta)=a(1+\cos\theta)$ que son ambas funciones explícitas.

3.19 Gráficos de funciones elementales

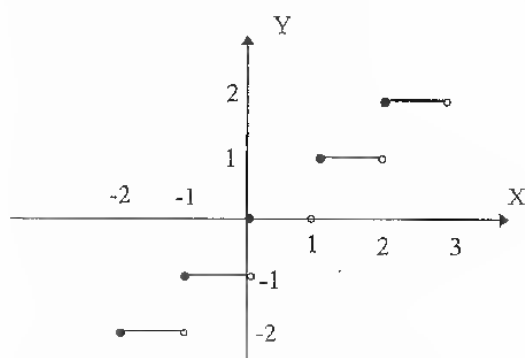
$$f(x) = x$$



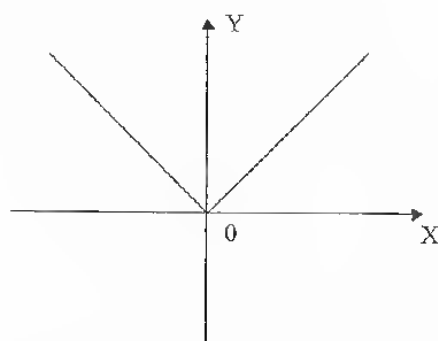
$$f(x) = ax + b$$



$$f(x) = [x]$$

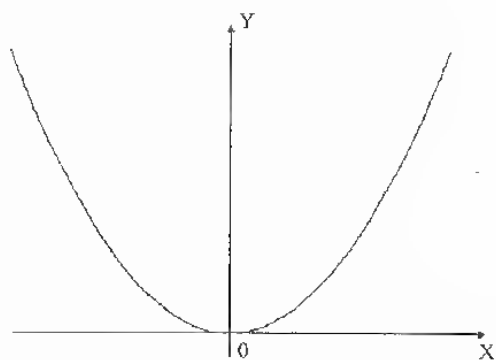


$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



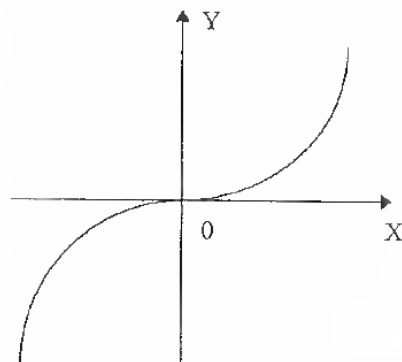
$$f(x) = x^n$$

$n > 0$, par.



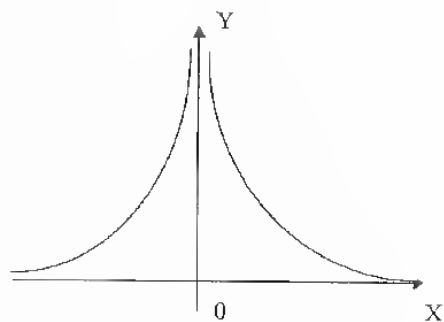
$$f(x) = x^n$$

$n > 0$, impar.



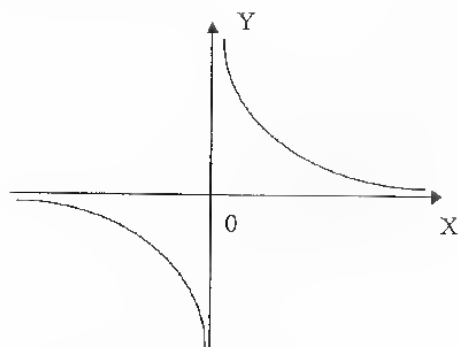
$$f(x) = x^n$$

$n < 0$, n par.



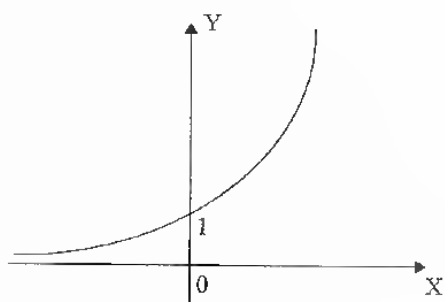
$$f(x) = x^n$$

$n < 0$, n impar.



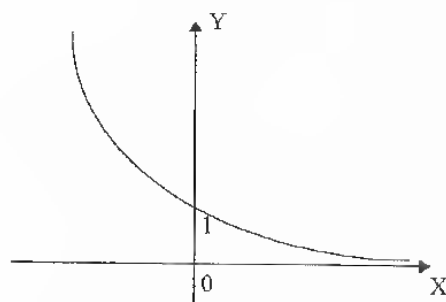
$$f(x) = a^x$$

$a > 1$



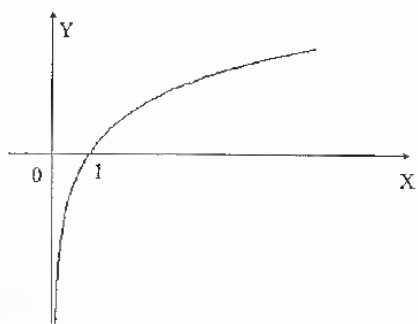
$$f(x) = a^x$$

$0 < a < 1$



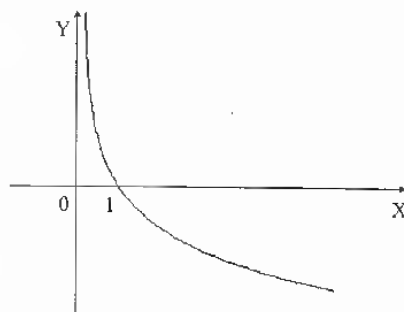
$$f(x) = \text{Log}_a x$$

$a > 1$



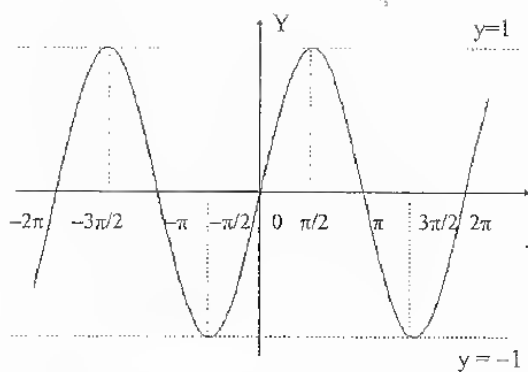
$$f(x) = \text{Log}_a x$$

$0 < a < 1$

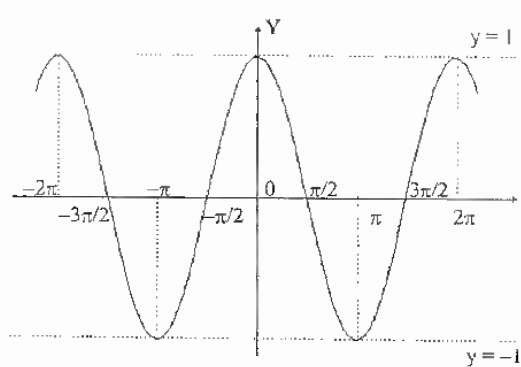


Funciones trigonométricas

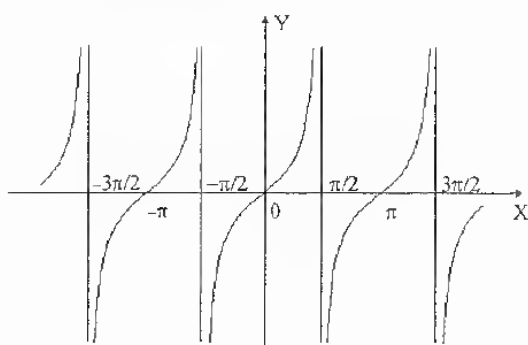
$$f(x) = \sin x$$



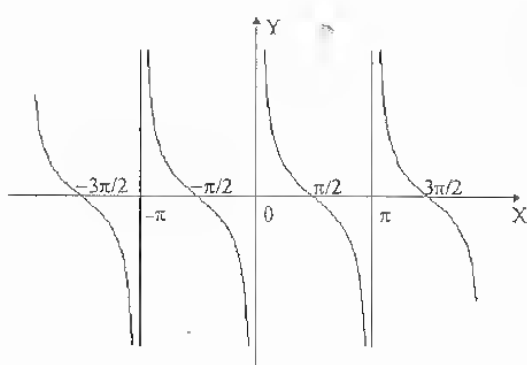
$$f(x) = \cos x$$



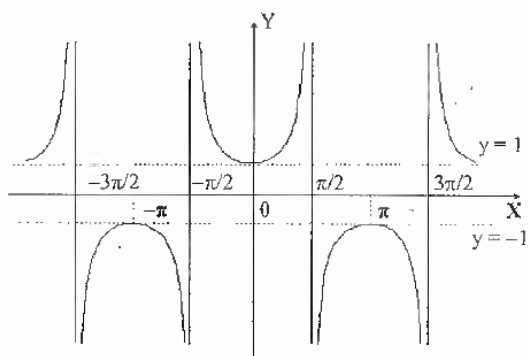
$$f(x) = \tan x$$



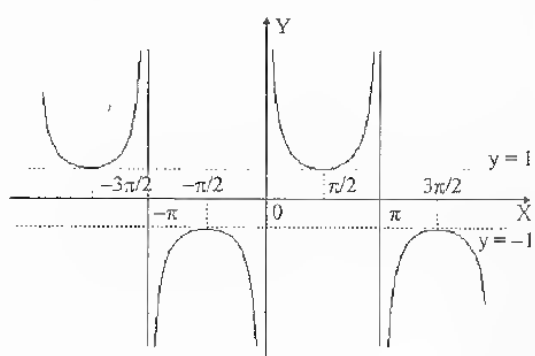
$$f(x) = \cot x$$



$$f(x) = \sec x$$

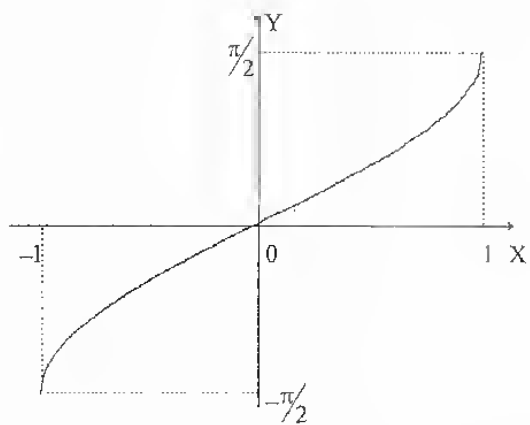


$$f(x) = \operatorname{cosec} x$$

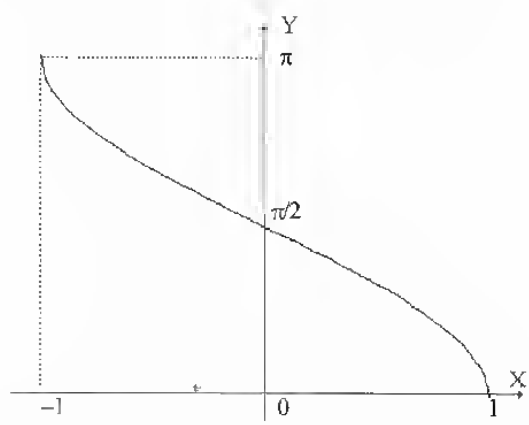


Funciones trigonométricas inversas

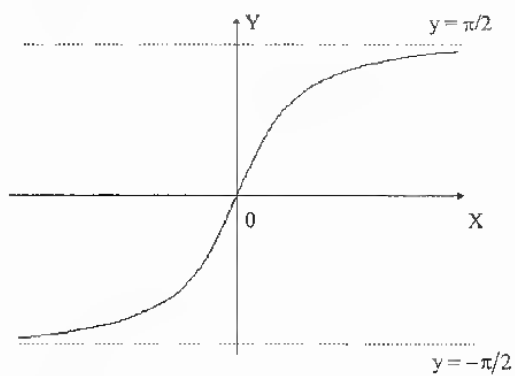
$$f(x) = \arcsen(x)$$



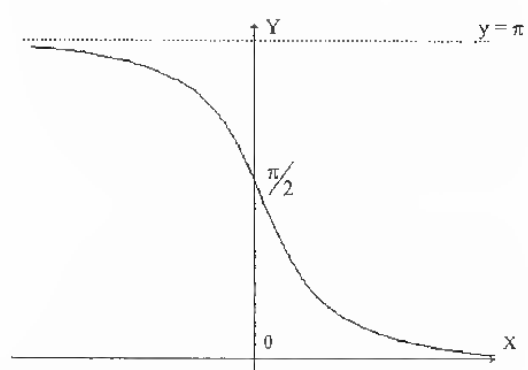
$$f(x) = \arccos(x)$$



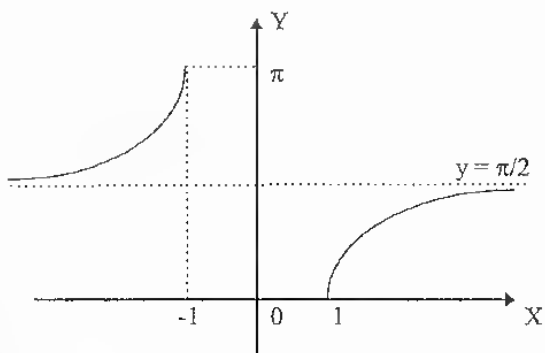
$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$



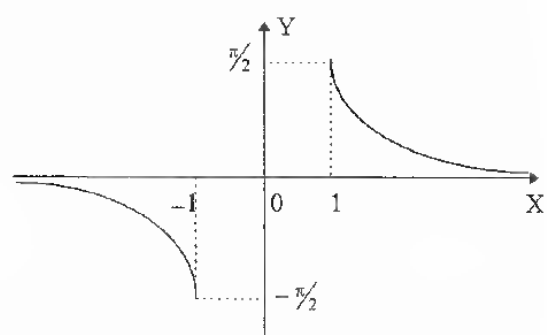
$$f(x) = \operatorname{arccotg} x$$



$$f(x) = \operatorname{arcsec} x$$

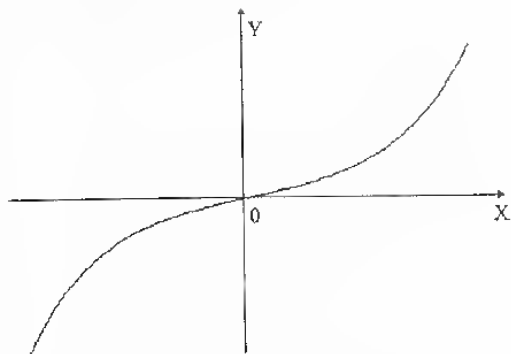


$$f(x) = \operatorname{arccosec} x$$

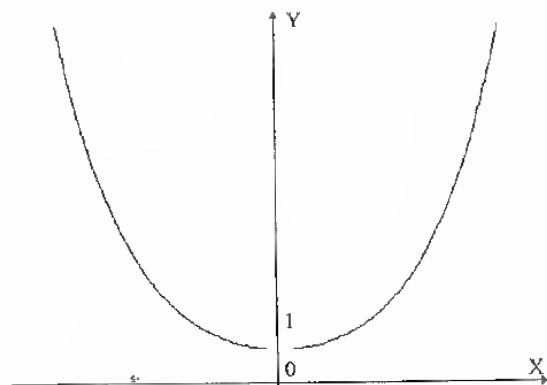


Funciones hiperbólicas

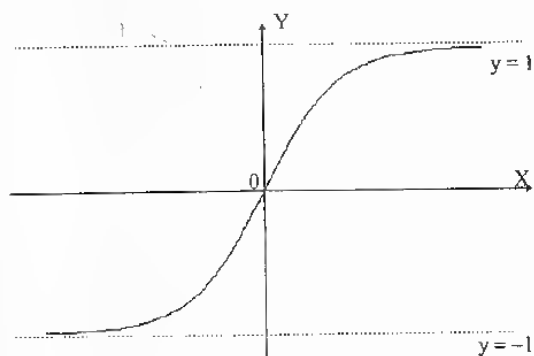
$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



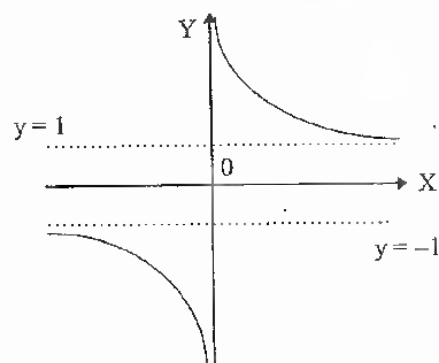
$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



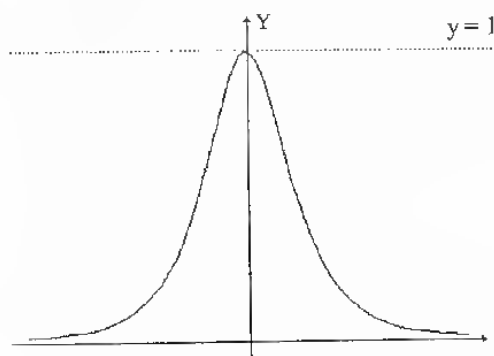
$$f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



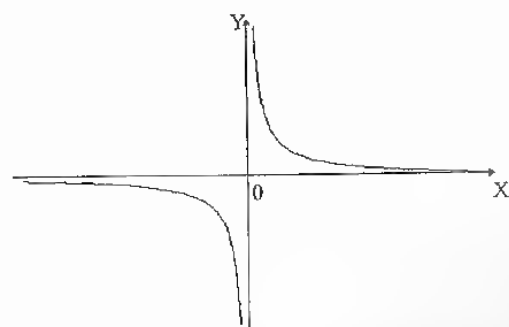
$$f(x) = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$$f(x) = \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

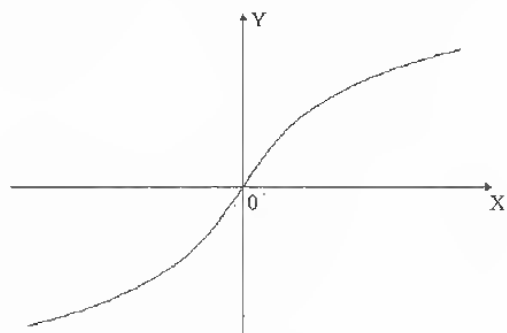


$$f(x) = \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

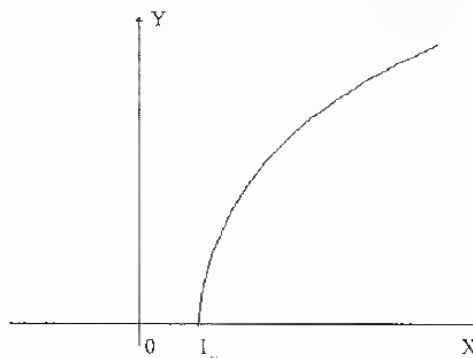


Funciones hiperbólicas inversas

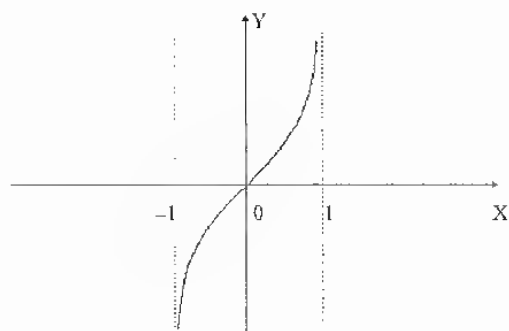
$$f(x) = \sinh^{-1} x = \operatorname{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$



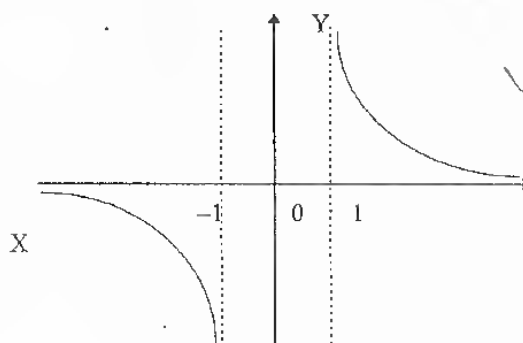
$$f(x) = \cosh^{-1} x = \operatorname{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$



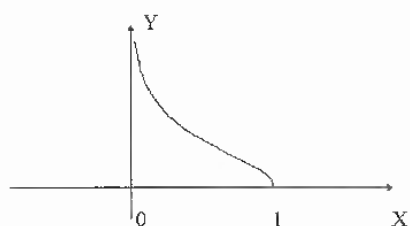
$$f(x) = \operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{con } |x| < 1$$



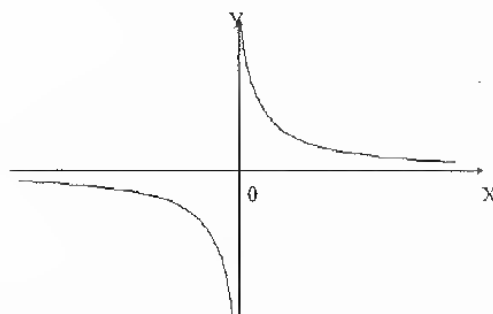
$$f(x) = \operatorname{cotgh}^{-1} x = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{con } |x| > 1$$



$$f(x) = \operatorname{sech}^{-1} x = \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$$



$$f(x) = \operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right)$$



EJERCICIOS RESUELTOS

3.1 Dada la función $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, calcular $f(3)$, $f(-\sqrt{6})$ y $f(t^2-1)$.

En todos los casos se sustituye el valor dado en la expresión algebraica que define a f :

$$f(3) = \sqrt{\frac{3+1}{3-1}} = \sqrt{2},$$

$$f(-\sqrt{6}) = \sqrt{\frac{-\sqrt{6}+1}{-\sqrt{6}-1}} = \sqrt{\frac{(-\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}+1)}{(-\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}} = \sqrt{\frac{5}{7+2\sqrt{6}}},$$

$$f(t^2-1) = \sqrt{\frac{t^2-1+1}{t^2-1-1}} = \sqrt{\frac{t^2}{t^2-2}} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2-2}}.$$

✓

Sucesiones

3.2 Encontrar los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{ \frac{n^2}{2n+1} \right\}$

Se sustituye $n=1,2,3,4,5,6$ en el término general de la sucesión:

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \frac{25}{11}, \frac{36}{13}.$$

✓

b) $\left\{ \frac{\ln(n)}{n} \right\}$

$$0, \frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 4}{4}, \frac{\ln 5}{5}, \frac{\ln 6}{6}.$$

✓

c) $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \right\}$

$$2, \frac{9}{4}, \frac{16}{9}, \frac{25}{16}, \frac{36}{25}, \frac{49}{36}.$$

✓

3.3 Encontrar el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son:

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \dots$

Se observa que los denominadores son números impares consecutivos, luego $a_n = \frac{1}{2n+1}$.

✓

b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

Los denominadores son las potencias de 3, $a_n = \frac{1}{3^n}$.

✓

c) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}), (\sqrt{3}-\sqrt{4}), (\sqrt{4}-\sqrt{5}), (\sqrt{5}-\sqrt{6}), \dots$

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$$



d) $2, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \dots$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$



Dominio de funciones

3.4 Encuentre el dominio de las funciones que se dan a continuación:

a) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

La función raíz cuadrada está definida solamente para cantidades subradicales positivas o iguales a cero, por lo tanto, se ha de tener

$$9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3.$$



b) $h(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+2}}$

El cociente está definido para los valores de la variable x que hacen el denominador distinto de cero, por otro lado, la función raíz cúbica no tiene restricciones para su definición, por lo cual:

$$\sqrt[3]{x+2} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2, \quad \text{por lo tanto } D(h) = \mathbb{R} - \{-2\}.$$



c) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{121x^2-44x+4} - \sqrt{3x-2}}$

Las cantidades subradicales deben ser positivas:

i) $3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}, \quad D_i = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$

ii) $121x^2-44x+4 \geq 0 \Leftrightarrow (11x-2)^2 \geq 0$, cuya solución es $D_{ii} = \mathbb{R}$.

Por otro lado, tenemos que el denominador no debe ser nulo:

$$\sqrt[4]{121x^2-44x+4} - \sqrt{3x-2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{121x^2-44x+4} = \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow |11x-2| = \sqrt{3x-2} \text{ con } x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right), \text{ por lo cual la}$$

ecuación no tiene solución; es decir, el denominador no se anula.

Por lo tanto, el dominio de f es:

$$D = D_i \cap D_{ii} = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right).$$



d) $f(x) = \arcsen\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)$

El argumento de la función arcoseno debe ser tal que $-1 \leq 2 - \frac{1}{x^2} \leq 1$ con $x \neq 0$. Se tienen que resolver las desigualdades:

1) $2 - \frac{1}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} \leq 0$, cuya solución es $S_1 = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

2) $-1 \leq 2 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 1}{x^2} \geq 0$, cuya solución es $S_2 = \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

El dominio de la función es, por lo tanto, $D(f) = S_1 \cap S_2 = \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$.



e) $f(x) = \text{Log} \frac{x}{x+1}$.

El argumento de la función logaritmo debe ser positivo, es decir, $\frac{x}{x+1} > 0$, cuya solución es $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.



f) $h(x) = \arccos(\cosh^{-1}(3x))$.

El dominio de la función arcocoseno es $[-1, 1]$, por lo tanto $-1 \leq \cosh^{-1}(3x) \leq 1$, pero la función $\cosh^{-1}(3x)$ es positiva, por lo tanto, resolveremos $0 \leq \cosh^{-1}(3x) \leq 1$ o equivalentemente $0 \leq \text{Ln}(3x + \sqrt{9x^2 - 1}) \leq 1$:

$e^0 \leq e^{\text{Ln}(3x + \sqrt{9x^2 - 1})} \leq e \Leftrightarrow 1 \leq 3x + \sqrt{9x^2 - 1} \leq e$, que a su vez es equivalente a resolver las siguientes dos desigualdades e intersectar sus soluciones:

a) $3x + \sqrt{9x^2 - 1} \leq e \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 - 1} \leq e - 3x \Leftrightarrow 9x^2 - 1 \leq e^2 - 6ex + 9x^2 \Leftrightarrow x \leq \frac{1+e^2}{6e}$

b) $1 \leq 3x + \sqrt{9x^2 - 1} \Leftrightarrow 1 - 3x \leq \sqrt{9x^2 - 1} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

Este resultado es más fácil obtenerlo de la desigualdad original: $0 \leq \cosh^{-1}(3x)$. Observando el gráfico y el dominio de la función se debe tener $3x \geq 1$, o sea $x \geq \frac{1}{3}$.

$$S_a \cap S_b = \left(-\infty, \frac{1+e^2}{6e}\right] \cap \left[\frac{1}{3}, +\infty\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{1+e^2}{6e}\right]$$

Así $D(h) = \left[\frac{1}{3}, \frac{1+e^2}{6e}\right]$



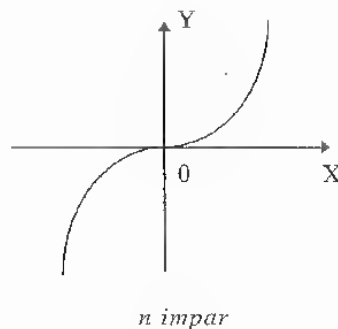
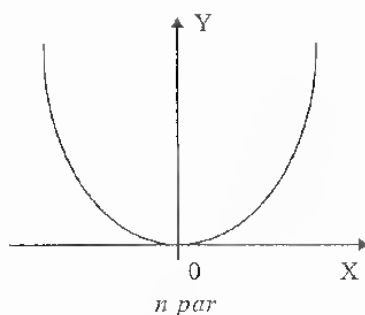
Paridad e imparidad

3.5 Probar que la función $f(x) = x^n$ es par si n es par, y es impar si n es impar.

En ambos casos se debe verificar que la definición se satisface para cualquier $x \in \mathbb{R}$:

$f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$ si n es par, luego f es par.

$f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$ si n es impar, por lo tanto f es impar.



3.6 Probar que la función constante es una función par.

$f(x) = c = f(-x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto $f(x) = c$ es par.



3.7 Probar que si f es impar y está definida en $x = 0$ entonces $f(0) = 0$.

Si f es impar entonces $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D(f)$, en particular para $x = 0$ se tendrá $f(0) = -f(0)$ de donde $2f(0) = 0$ y por lo tanto $f(0) = 0$.

Nota: Este resultado nos proporciona una forma de chequear que una función f no es impar: si $0 \in D(f)$ y $f(0) \neq 0$ entonces f no es impar.



3.8 Probar que la función $f(x) = x^3 + 1$ no es impar.

El dominio de f es \mathbb{R} y $f(0) = 1$, por lo tanto f no es impar.



3.9 Probar que $f(x) = \frac{x}{1+2x}$ no es impar ni par.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ no es simétrico respecto del origen, luego no tiene sentido hablar de paridad o de imparidad.



3.10 Probar que $f(x) = x^3 + x^2$ no es par ni impar.

Tomemos dos puntos simétricos respecto del origen, pueden ser $x = 1$ y $x = -1$, $f(1) = 2$ y $f(-1) = 0$.

Es decir, $f(1) \neq f(-1)$, por lo tanto f no es par, y $f(1) \neq -f(-1)$ luego f no es impar.

NOTA: Para demostrar que una función es par o impar, en todo caso, se hace uso de la definición como en el caso de los ejercicios 3.5 y 3.6; en cambio, para demostrar que no es par o impar se usa un par de números simétricos respecto del origen, para los cuales no se satisfaga la definición correspondiente.



Funciones periódicas

3.11 Probar que $f(x) = \sin x$ es periódica y calcular su período.

Se debe probar que existe $P > 0$ tal que $f(x+P) = f(x) \quad \forall x \in D(f)$:

$$\sin(x+P) = \sin x \Leftrightarrow \sin x \cos P + \cos x \sin P = \sin x$$

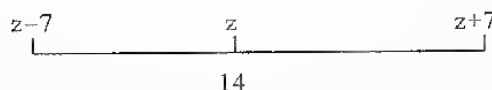
$$\Leftrightarrow \cos P = 1 \text{ y } \sin P = 0,$$

el menor de los números reales positivos que satisface ambas igualdades es $P = 2\pi$.



3.12 Calcular el periodo de una función f de la cual se sabe que para cada número real x $f(x+8) = -f(x+1)$.

 $f(x+8) = -f(x+1) \forall x$, en particular para $x = z-8$ y $x = z-1$ se obtienen, respectivamente, que $f(z) = -f(z-7)$ y $f(z+7) = -f(z)$, cualquiera que sea z , de donde: $f(z+7) = f(z-7)$:



Los valores de la función se repiten en puntos que están distanciados 14 unidades, por lo cual éste debe ser el periodo, probémoslo:

$$f(x+14) = f((x+6)+8) = -f((x+6)+1) = -f(x+7) = -(-f(x)) = f(x)$$



3.13 Sea f una función con dominio \mathbb{R} tal que $f(x+2) = -f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es periódica de periodo 4.

 $f(x+4) = f((x+2)+2) = -f(x+2) = -(-f(x)) = f(x)$, luego $P = 4$ es un periodo de f .



3.14 f es periódica de periodo 3 y $f(x) = \frac{1}{x}$ si $0 < x \leq 3$, calcular $f(\frac{19}{3})$.

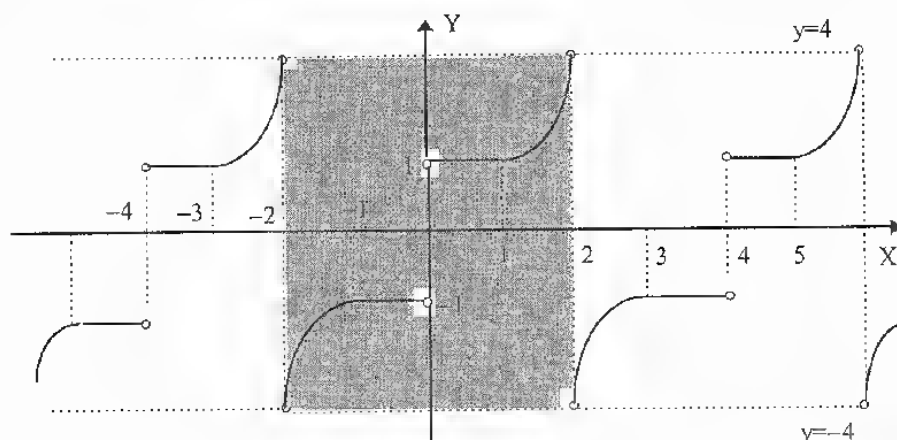
 Si f es periódica de periodo 3 se tiene que: $f(\frac{19}{3}) = f(\frac{19}{3} - 3) = f(\frac{10}{3} - 3) = f(\frac{1}{3}) = 3$.



3.15 Construir el gráfico de una función $f(x)$ impar de periodo 4, sabiendo que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$.

 Los pasos para construir el gráfico serán los siguientes:

- * De acuerdo con la regla de correspondencia dada se traza el gráfico en el intervalo $(0, 2)$.
- * Extendemos el gráfico al intervalo $(-2, 2)$ usando la imparidad, geométicamente significa que hay simetría respecto del origen. Observe que la longitud del intervalo es 4 (periodo principal). Vea recuadro gris.
- * Por último, extendemos el gráfico a toda la recta real usando la periodicidad, en este caso que $f(x+4) = f(x) \forall x$.



3.16 Demostrar que si $f(x)$ es una función periódica con periodo P , entonces $f(ax+b)$ con $a > 0$ es periódica con periodo P/a .

Sea $F(x) = f(ax+b)$, se quiere probar que $F(x+\frac{P}{a}) = F(x) \forall x$:

$$F(x+\frac{P}{a}) = f(a(x+\frac{P}{a})+b) = f(ax+b+P) = f(ax+b) = F(x).$$



3.17 Probar que $g(x) = \cos x^2$ no es periódica.

Supongamos que g es periódica, luego existe $P > 0$ tal que $\cos(x+P)^2 = \cos x^2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$; en particular para $x = 0$ se tendría $\cos P^2 = \cos 0 = 1$, de donde $P^2 = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ y por ser el período principal debe ser $P = \sqrt{2\pi}$. No obstante, para $x = 1$, $\cos(1+\sqrt{2\pi})^2 \neq \cos 1$, lo cual contradice el hecho de que g sea periódica.

Otra forma pudiera ser chequear que, al menos, algún valor tomado por la función no se repite a intervalos de longitud igual.



Onda senoidal. Traslaciones y reflexiones

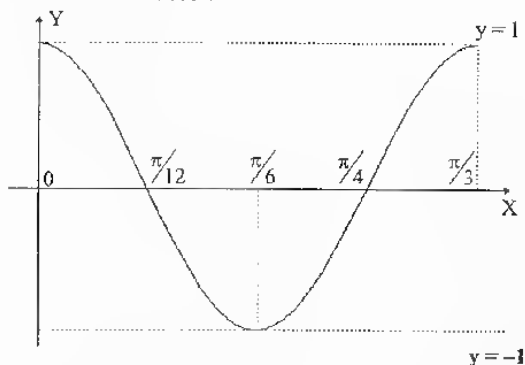
3.18 Graficar la función $y = 4\sin^2(3x-1)$

$y = 4\sin^2(3x-1) = \frac{4 \cdot (1 - \cos(6x-2))}{2} = 2 - 2\cos(6x-2) = 2 - 2\cos 6(x - \frac{1}{3})$ ¿Qué identidad trigonométrica se usó?

Periodo: $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Se deduce el gráfico mediante traslaciones y reflexiones, partiendo de la función elemental $\cos x$.

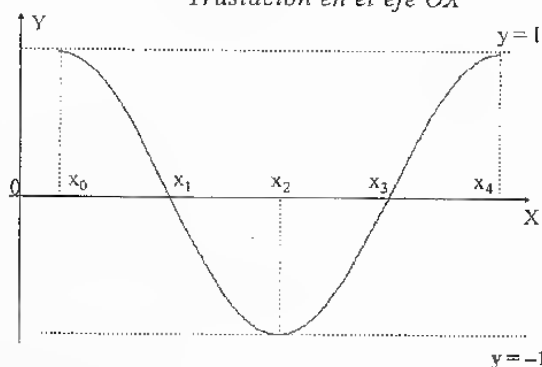
$$y_1 = \cos 6x$$

Contracción



$$y_2 = \cos 6(x - \frac{1}{3})$$

Traslación en el eje OX

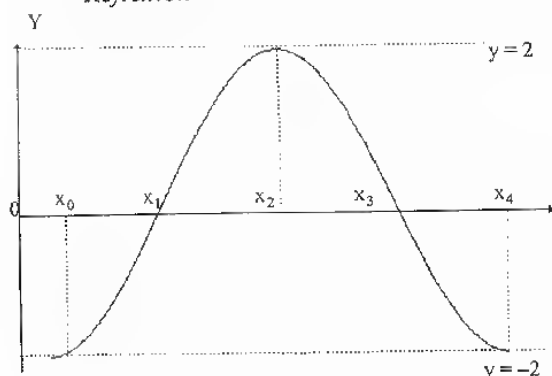


donde $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$ y $x_4 = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}$.

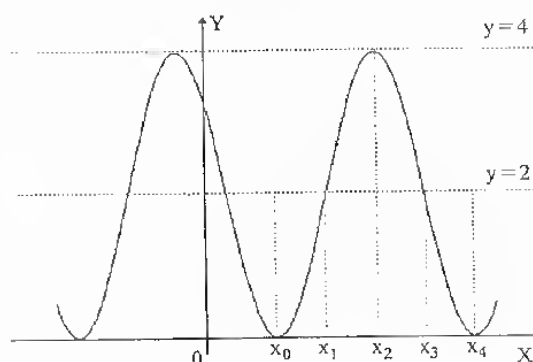
$$y_3 = -2\cos 6(x - \frac{1}{3})$$

$$y_4 = 2 - 2\cos 6(x - \frac{1}{3})$$

Reflexión



Traslación en el eje OY



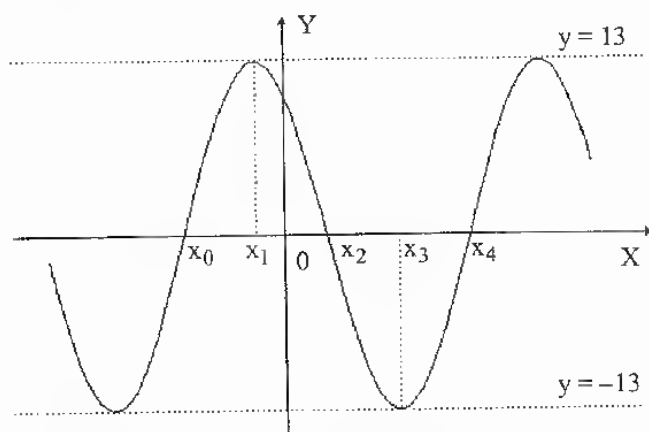
3.19. Pruebe que $y = a \sin \omega x + b \cos \omega x$ se puede escribir como $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ donde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.

 $A \sin(\omega x + \alpha) = A \sin \omega x \cos \alpha + A \cos \omega x \sin \alpha = a \sin \omega x + b \cos \omega x$, para cada x , si y sólo si $a = A \cos \alpha$ y $b = A \sin \alpha$; de donde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.



3.20.- Grafique la función cuya ley de correspondencia es $f(x) = 5 \sin 2x + 12 \cos 2x$

 $A = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$, o sea $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right)$ radianes. Luego, por el ejercicio anterior $f(x) = 13 \sin(2x + \alpha) = 13 \sin 2\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)$. Periodo = π .



$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{\alpha}{2} \\ x_1 &= \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \\ x_2 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ x_3 &= \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \\ x_4 &= \pi - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$



3.21.-Construya el gráfico de las siguientes funciones:

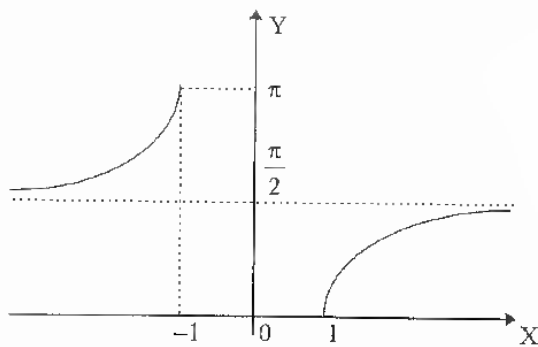
a) $f(x) = 2 + \operatorname{arcsec} 3(x+1)$

b) $f(x) = 2 - \operatorname{Log}_3(1-x)$

 Se construirá el gráfico, partiendo de funciones elementales, usando traslaciones, reflexiones, etc.

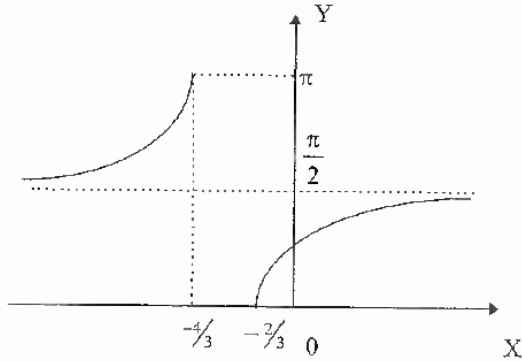
a)
 $y = f_1(x) = \operatorname{arcsec} x$

$y = f_2(x) = \operatorname{arcsec} 3x$

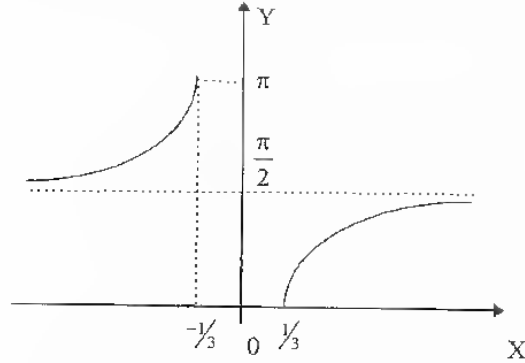


$$y = f_3(x) = \operatorname{arcsec} 3(x+1)$$

Traslación de una unidad a la izquierda

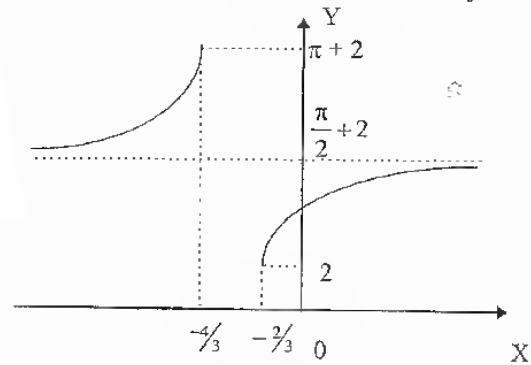


Contracción



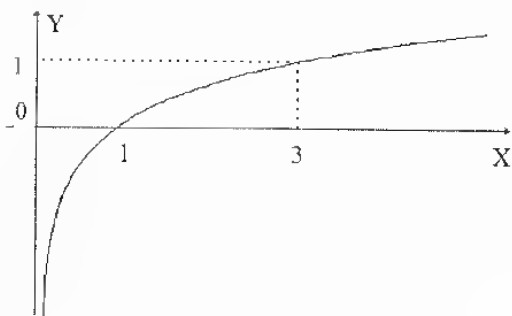
$$y = f_4(x) = 2 + \operatorname{arcsec} 3(x+1)$$

Traslación de dos unidades en el eje OY



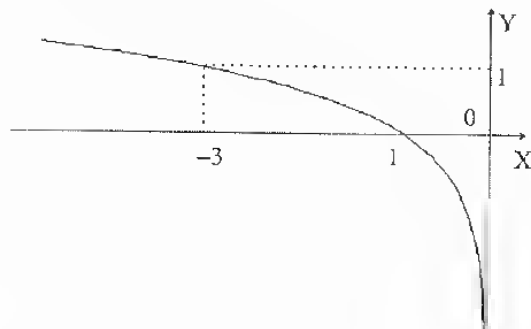
b)

$$y = f_1(x) = \operatorname{Log}_3 x$$



$$y = f_2(x) = \operatorname{Log}_3(-x)$$

Reflexión respecto del eje OY

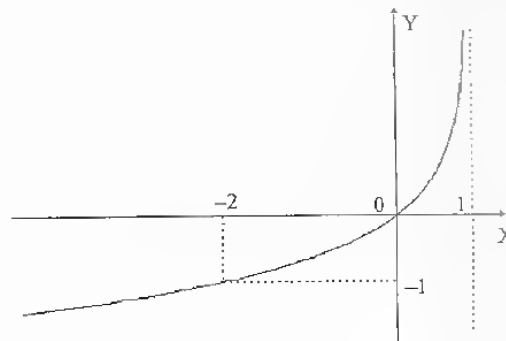
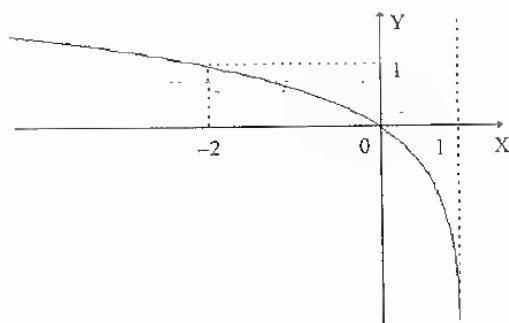


$$y = f_3(x) = \operatorname{Log}_3(1-x)$$

Traslación de una unidad a la derecha

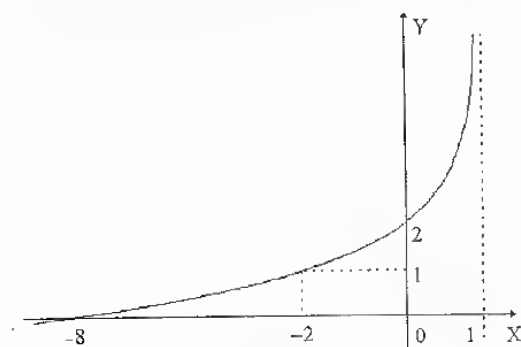
$$y = f_4(x) = -\operatorname{Log}_3(1-x)$$

Reflexión respecto del eje OX



$$y = f_5(x) = 2 - \text{Log}_3(1-x)$$

Traslación de dos unidades hacia arriba



Para calcular el corte con el eje OX se debe resolver la ecuación $f_5(x) = 0$, de donde:

$$\text{Log}_3(1-x) = 2 \Leftrightarrow 1-x = 3^2 \Leftrightarrow x = -8$$



Composición de funciones

3.22.- Dadas las funciones $r(x) = x^2 + 1$ y $s(x) = 2x - 1$, dar las reglas de correspondencia de $(r \circ s)(x)$ y $(s \circ r)(x)$.

Veamos previamente si son componibles: $D(r) = \mathbb{R}$ y $R(r) = [1, +\infty)$, $D(s) = \mathbb{R}$ y $R(s) = \mathbb{R}$, luego $D(r) \cap R(s) \neq \emptyset$, por lo tanto, tiene sentido la composición $(r \circ s)(x)$. $D(s) \cap R(r) \neq \emptyset$, por lo tanto, tiene sentido la composición $(s \circ r)(x)$.

$$(r \circ s)(x) = r(s(x)) = r(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$$

$$(s \circ r)(x) = s(r(x)) = s(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 1 = 2x^2 + 1$$



3.23.- Representar $f(x) = \sqrt{\cos(3^{x+1})}$ como composición de funciones elementales.

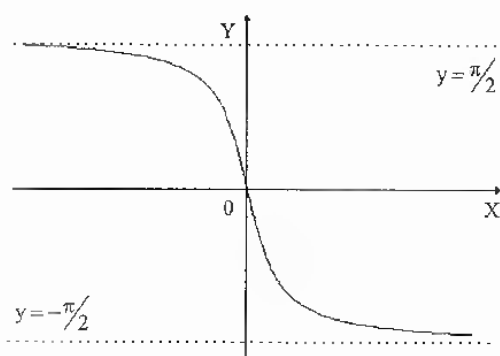
Siendo $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \cos x$, $s(x) = 3^x$ y $u(x) = x+1$ entonces $f(x) = (h \circ g \circ s \circ u)(x)$



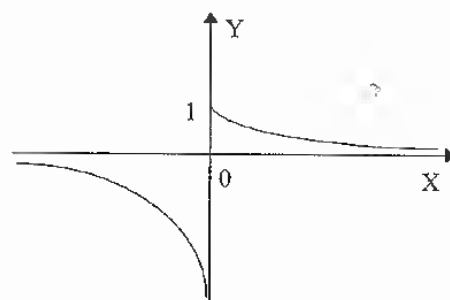
3.24.- Dadas las funciones $g(x) = \operatorname{arctg}(-x)$ y $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

- Graficar las funciones.
- Determinar si es válida la composición $f \circ g$.
- Determinar el dominio de $f \circ g$.
- Dar la regla de correspondencia de $f \circ g$.

a)



En la función $\operatorname{arctg}(x)$ se sustituye x por $-x$ para obtener $g(x)$; este cambio de variable representa geoméricamente una reflexión respecto del eje OY.

Gráfico de $f(x)$:

b) $D(f) \cap R(g) = R \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \neq \emptyset$, luego tiene sentido la composición $f \circ g$.

Nota sobre el "cálculo" del dominio de la composición:

Recordemos que el dominio de $f \circ g$ es el conjunto $D(f \circ g) = \{x : x \in D(g) \text{ y } g(x) \in D(f)\}$.
 Queremos encontrar los valores de x que, digamos, satisfacen dos condiciones:
 $1^{\text{ra}} \quad x \in D(g) \quad 2^{\text{da}} \quad g(x) \in D(f)$,
 $g(x)$ es un elemento de la imagen de g y estos elementos se ubican, geoméricamente, en el eje OY.

c) Por ser $D(f) = \mathbb{R}$ (f función externa), el cálculo de $D(f \circ g)$ resulta algo trivial:

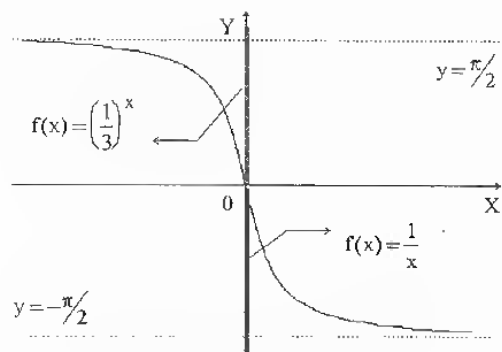
cualquiera que sea $x \in D(g)$ se tendrá que $g(x) \in D(f)$, luego $D(f \circ g) = \mathbb{R}$.

d) Para comprender mejor las sustituciones por realizar se opta por el siguiente procedimiento:

** Se grafica la función interna (g en nuestro caso).

** En el mismo sistema de coordenadas se marca sobre el eje OY el dominio de la función externa (f en este caso).

** Se indica como está definida f por intervalos.



Si

$$x \in (-\infty, 0] \quad \arctg(-x) \geq 0 \quad y \quad f(\arctg(-x)) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\arctg(-x)},$$

si

$$x \in (0, +\infty) \quad \arctg(-x) < 0 \quad y \quad f(\arctg(-x)) = \frac{1}{\arctg(-x)},$$

$$\text{por lo tanto } (f \circ g)(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{\arctg(-x)} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\arctg(-x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



3.25.-Siendo $g(x) = 2 + \operatorname{arccsc}(x-2)$ y $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, dar las reglas de correspondencia y el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$.

$$D(g) = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty), \quad R(g) = \left[-\frac{\pi}{2} + 2, 2\right) \cup \left(2, \frac{\pi}{2} + 2\right] \quad y \quad D(f) = R(f) = \mathbb{R}.$$

Para que tenga sentido $f \circ g$ se debe tener $D(f) \cap R(g) \neq \emptyset$, lo cual ocurre.

Regla de correspondencia: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2 + \operatorname{arccsc}(x-2)) = (2 + \operatorname{arccsc}(x-2))^2 - 1$.

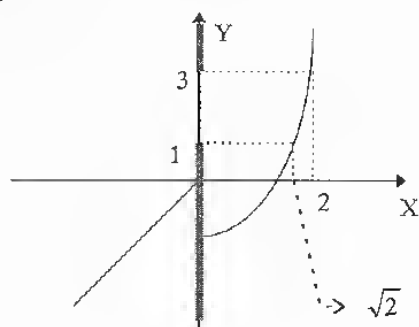
El dominio de la función externa f es \mathbb{R} , por lo tanto, el dominio de $D(f \circ g) = D(g) = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

Veamos ahora $g \circ f$:

$D(g) \cap R(f) \neq \emptyset$ luego la composición es válida.

Repetimos el procedimiento descrito anteriormente: graficamos la función interna f y sobre el mismo sistema de coordenadas marcamos sobre el eje OY el dominio de la función externa g (en el gráfico señalado en gris).

Repetimos: $g(f(x))$ tiene sentido si $f(x) \in D(g)$. Para dar respuesta a lo anterior, se resuelve la desigualdad:



$$1 < f(x) < 3,$$

$$1 < x^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow \sqrt{2} < x < 2.$$

Si $x \in (\sqrt{2}, 2)$, $f(x) \notin D(g)$, luego $x \notin D(g \circ f)$, se concluye que

$$D(g \circ f) = (-\infty, \sqrt{2}] \cup [2, +\infty).$$

Regla de correspondencia de $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2 + \operatorname{arccsc}(x-2) & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ 2 + \operatorname{arccsc}(x^2 - 3) & \text{si } 0 < x \leq \sqrt{2} \\ 2 + \operatorname{arccsc}(x^2 - 3) & \text{si } 2 \leq x < \infty \end{cases}$$



3.26.- Dada $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 3$ y $g(x) = x + 2$, hallar $f(x)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = x^2 + 4x + 3.$$

Hagamos el cambio $z = x + 2$, luego $x = z - 2$ y $x^2 + 4x + 3 = (z - 2)^2 + 4(z - 2) + 3 = z^2 - 1$.

Por lo tanto, $f(z) = z^2 - 1$.



Inyectividad. Función inversa

3.27 Deduzca que la función inversa de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ es ella misma.

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}; \text{ por lo tanto } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Otra alternativa sería chequear que $(f \circ f)(x) = x$.



3.28.- Probar que las funciones $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ y $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ son inversas una de la otra.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{\frac{2x+3}{x-1} + 3}{\frac{2x+3}{x-1} - 2} = \frac{\frac{x-1}{x-1} + 3}{\frac{x-1}{x-1} - 2} = \frac{5x}{x-1} = x \quad y \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{2 \frac{x+3}{x-2} + 3}{\frac{x+3}{x-2} - 1} = \frac{\frac{x-2}{x-2} + 3}{\frac{x-2}{x-2} - 1} = \frac{5x}{x-2} = x.$$



3.29.- Dada $f(x) = \sqrt{2x-3}$

a) Pruebe que existe su función inversa.

b) Obtenga geoméricamente el gráfico de f^{-1} .

a) Probemos que f es inyectiva:

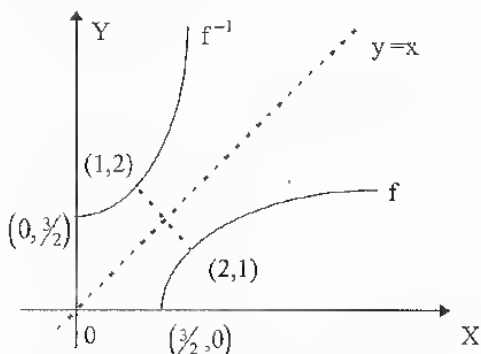
Sean $x_1, x_2 \in D(f)$ cualesquiera,

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{2x_1-3} = \sqrt{2x_2-3} \Leftrightarrow 2x_1-3 = 2x_2-3 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Como f es inyectiva existe su función inversa.

También se puede hacer el ejercicio deduciendo directamente f^{-1} .

$$b) D(f) = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) = R(f^{-1}) \quad y \quad R(f) = [0, +\infty) = D(f^{-1}).$$



Los puntos $(\frac{3}{2}, 0)$ y $(2, 1)$ del gráfico de f se transforman, por simetría respecto de la recta $y = x$, en $(0, \frac{3}{2})$ y $(1, 2)$ del gráfico de f^{-1} .



3.30.- Siendo $f(x) = \operatorname{tg} x - 3$ y $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$, hallar $g(x)$.

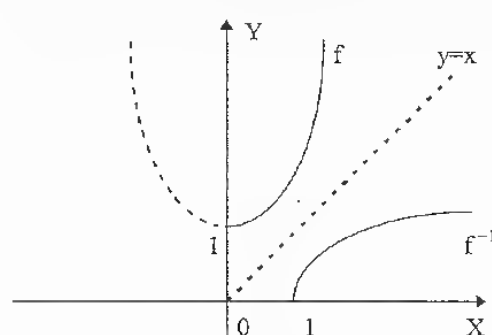
Supongamos que estamos trabajando en un intervalo donde f es inyectiva, por lo tanto aquí existe $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x+3)$. Se aplica f^{-1} a ambos lados de la ecuación $f(g(x)) = x^2 + 2$:

$$f^{-1}(f(g(x))) = f^{-1}(x^2 + 2) \Leftrightarrow g(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + 5).$$



3.31.- Dada $f(x) = \cosh x$, restringir el dominio para que exista f^{-1} y calcular la expresión que la define.

La función $f(x) = \cosh x$ no es una función inyectiva, por ejemplo $f(1) = f(-1) = \frac{e^2 + 1}{2e}$, por lo cual no tiene función inversa; pero si restringimos su dominio a $x \geq 0$ tendremos una función inyectiva y, por lo tanto, se puede despejar x en función de y en forma única:



$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0;$$

ésta última es una ecuación de segundo grado en e^x , cuyas soluciones son:

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

¿Cuál de los dos signos elegimos?

Se debe tener en cuenta que el rango de la función restringida sigue siendo $[1, +\infty)$.

Si $y \geq 1 \Rightarrow y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$, en efecto:

$$y \geq 1 \Rightarrow 2 - 2y \leq 0 \Rightarrow -2y + 1 \leq -1 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 \leq y^2 - 1 \Rightarrow (1 - y)^2 \leq y^2 - 1 \Rightarrow |1 - y| \leq \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow -(1 - y) \leq \sqrt{y^2 - 1}$$

de la última desigualdad se obtiene que $y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$.

Pero para $x \geq 0$ (dominio restringido) $e^x \geq 1$, por lo cual se descarta el signo negativo. Se tiene entonces

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1},$$

tomando logaritmo natural a ambos lados de la ecuación resulta:

$$x = \text{Ln}(y + \sqrt{y^2 - 1}),$$

cambiando ahora y por x (la variable es muda) se tendrá:

$$f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x = \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

✓

3.32.- Deduzca que $\text{csch}^{-1} x = \text{Ln}\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$

.....

La función $y = \text{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ es inyectiva, por lo cual existe su función inversa; para obtener su regla de correspondencia se despeja x de la ecuación anterior:

$$y = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} \Leftrightarrow y(e^{2x} - 1) = 2e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - \frac{2}{y}e^x - 1 = 0$$

Ésta última es una ecuación de segundo grado en e^x , cuyas soluciones son:

$$e^x = \frac{\frac{2}{y} \pm \sqrt{\frac{4}{y^2} + 4}}{2} = \frac{1}{y} \pm \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}, \text{ donde esta expresión debe ser positiva por lo cual se descarta el signo}$$

$$\text{menos, luego } e^x = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}, \text{ equivalente a } \text{Ln}(e^x) = \text{Ln}\left(\frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}\right), \text{ de donde } x = \text{Ln}\left(\frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}\right).$$

Cambiando x por y tenemos la función inversa:

$$\text{csch}^{-1} x = \text{Ln}\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right).$$

✓

3.33.- Demuestre que:

a) $\text{Log}_a(xy) = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$ con $x, y > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$.

 $\text{Log}_a(xy) = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = xy$; $\text{Log}_a x = \beta \Leftrightarrow a^\beta = x$; $\text{Log}_a y = \lambda \Leftrightarrow a^\lambda = y$. Por lo tanto
 $\text{Log}_a(xy) = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = xy = a^\beta a^\lambda = a^{\beta+\lambda}$, por ser la exponencial una función inyectiva se debe tener
 $\alpha = \beta + \lambda$ o sea $\text{Log}_a(xy) = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$.



b) $\text{Log}_b x = \frac{\text{Log}_a x}{\text{Log}_a b}$ (Fórmula de cambio de base).

Sea $y = \text{Log}_b x \Leftrightarrow x = b^y \Leftrightarrow \text{Log}_a x = \text{Log}_a b^y \Leftrightarrow \text{Log}_a x = y \text{Log}_a b \Leftrightarrow y = \frac{\text{Log}_a x}{\text{Log}_a b}$.



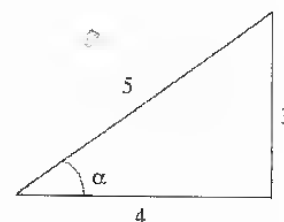
3.34.- Calcular el valor de:

a) $\text{sen}(\text{arctg} \frac{3}{4})$

----- . Sea $\alpha = \text{arctg} \frac{3}{4}$ donde α es tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, luego

$\text{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ y se tiene la siguiente relación triangular:

Por lo tanto, $\text{sen} \alpha = \text{sen}(\text{arctg} \frac{3}{4}) = \frac{3}{5}$.



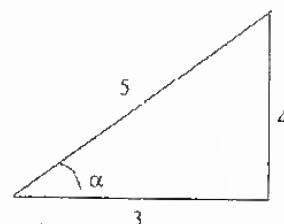
b) $\text{tg}(\text{arcsen}(-\frac{4}{5}))$.

Sea $\alpha = \text{arcsen}(-\frac{4}{5})$ donde α es tal que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$; luego

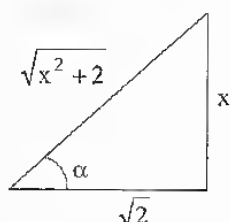
$\text{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$ y se puede establecer la siguiente relación triangular:

Por ser la función tangente negativa en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ se tiene

$\text{tg} \alpha = \text{tg}(\text{arcsen}(-\frac{4}{5})) = -\frac{4}{3}$.



3.35.- Escribir la expresión $\text{cosec}(\text{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}})$ en forma algebraica.



Sea $\alpha = \text{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$ tal que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\text{tg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{2}}$ y se tiene la relación triangular

Por lo tanto, $\text{cosec} \alpha = \text{cosec}(\text{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x}$.



Funciones paramétricas

3.36.- Una función está dada por:

$$\begin{aligned}x(t) &= 10t \cos \alpha \\ y(t) &= 10t \sin \alpha - 5t^2\end{aligned}$$

- a) Demuestre que la gráfica de la función es una parábola.
b) Encuentre los cortes de la gráfica con los ejes.

a)

$$x(t) = 10t \cos \alpha \Leftrightarrow t = \frac{x}{10 \cos \alpha}.$$

Luego substituyendo resulta $y = 10 \frac{x}{10 \cos \alpha} \sin \alpha - 5 \frac{x^2}{100 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{20 \cos^2 \alpha}.$

Como y es un polinomio de segundo grado en x la función es una parábola.

b)

Cortes con el eje OX:

Si $y = 0$ se tiene $x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{x}{20 \cos^2 \alpha} \right) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 10 \sin 2\alpha$.

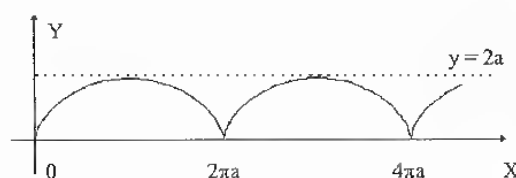
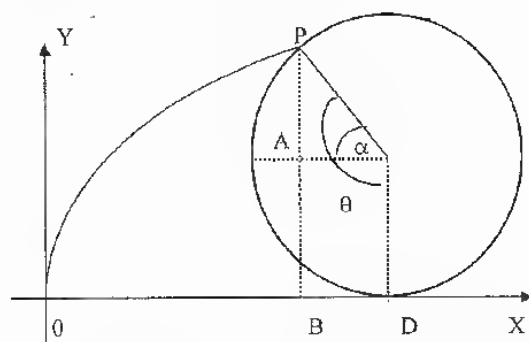
Los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(10 \sin 2\alpha, 0)$.

Cortes con el eje OY:

Se substituye $x = 0$ y se obtiene $y = 0$; el punto es por lo tanto $(0, 0)$.



3.37.- Deducir las ecuaciones paramétricas de la curva (CICLOIDE) trazada por un punto P de un círculo que rueda sin deslizar sobre una línea recta.



Consideremos un círculo de radio a y un punto P de él que inicialmente coincida con el origen, el cuál girará en sentido antihorario un ángulo de θ radianes. Supongamos que las coordenadas de P son x e y , entonces:

$$x = \overline{OD} - \overline{BD} \quad \text{e} \quad y = \overline{BA} + \overline{AP},$$

donde $\overline{BD} = a \cos \alpha = a \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = a \sin \theta$, $\overline{OD} = a \theta$

$\overline{AP} = a \sin \alpha = a \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = -a \cos \theta$, $\overline{BA} = a$

Luego $x = a \theta - a \sin \theta$, $y = a - a \cos \theta$.



3.38.- Hallar la ecuación cartesiana de una curva que viene dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

a) $x=2t+3$, $y=t^2+3$.

Se despeja de una de las ecuaciones el parámetro y se sustituye en la otra:

$x=2t+3 \Leftrightarrow t=\frac{x-3}{2}$, por lo tanto , $y=\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+3$, de donde $y-3=\frac{1}{4}(x-3)^2$ que representa una parábola con vértice en el punto (3,3) y que se abre hacia arriba.



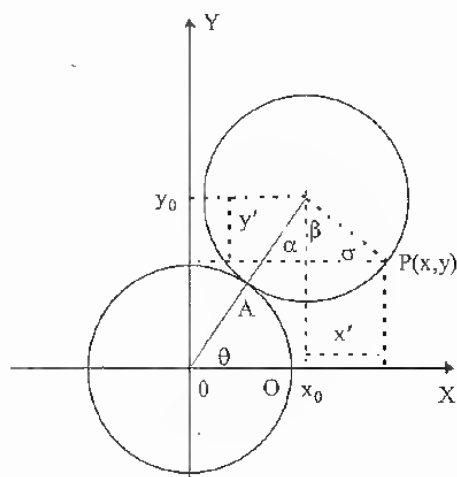
b) $x = \cosh t$, $y = \sinh t$

Elevamos al cuadrado y restamos: $x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Por lo tanto la curva es la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ ya que $x = \cosh t \geq 0$.

Nota: Al hecho señalado en este ejercicio se debe el nombre de funciones hiperbólicas.



3.39.-Deducir las ecuaciones paramétricas de un punto sobre una circunferencia de radio r que rueda sin deslizar sobre otra circunferencia de radio r (*Cardioides: caso particular de la epicloide*).



Sean (x_0, y_0) las coordenadas del centro de la circunferencia que está girando en sentido antihorario, entonces en función del ángulo de giro θ se tiene:

$$x_0 = 2r \cos \theta \quad ; \quad y_0 = 2r \sin \theta.$$

Sean $x' = r \cos \sigma$ e $y' = r \sin \sigma$, donde σ es el ángulo de la figura. $\sigma = \frac{\pi}{2} - \beta$ y $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$, además la longitud del arco OA es igual a la del arco AP porque las circunferencias tienen igual radio, así que $\theta = \alpha + \beta$.

De estas relaciones se deduce que $\sigma = \pi - 2\theta$.

Siendo (x, y) las coordenadas de P se tiene:

$$x = x_0 + x' \quad \text{e} \quad y = y_0 - y'.$$

Por lo tanto:

$$x = 2r \cos \theta + r \cos(\pi - 2\theta) = r(2 \cos \theta - \cos 2\theta)$$

$$y = 2r \sin \theta - r \sin(\pi - 2\theta) = r(2 \sin \theta - \sin 2\theta).$$



Resolución de algunas ecuaciones no algebraicas

3.40.- Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Es una ecuación cuadrática en e^x : $(e^x)^2 + e^x - 2 = 0$, por lo tanto $e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$,

$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, $e^x = -2$ no tiene solución real. La única solución de la ecuación es $x = 0$.



b) $\log_3(x+6) - \log_3(x-2) = 2$

$$\log_3(x+6) - \log_3(x-2) = 2 \Leftrightarrow \log_3 \frac{x+6}{x-2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+6}{x-2} = 3^2 \Leftrightarrow x = 3.$$



c) $2^{5x+3} = 3^{2x+1}$

Aplicando logaritmo en base 2 a ambos lados resulta: $5x+3 = (2x+1)\text{Log}_2 3$

$$x = \frac{-3 + \text{Log}_2 3}{5 - 2\text{Log}_2 3}.$$



d) $\arcsen(3x-\pi) = \frac{1}{2}$.

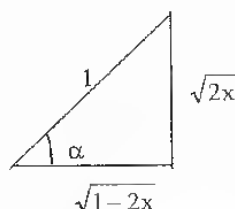
Para despejar x se aplica a ambos lados la función inversa:

$$\text{sen}(\arcsen(3x-\pi)) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 3x-\pi \cong 0.4794255 \Leftrightarrow x \cong 1.2070061.$$



e) $\arcsen\sqrt{2x} = \arccos\sqrt{x}$

Aplicando la función coseno a ambos lados se tiene: $\cos(\arcsen\sqrt{2x}) = \sqrt{x}$. Llamemos $\alpha = \arcsen\sqrt{2x}$, por lo tanto se tiene la relación triangular:



$\cos \alpha = \sqrt{1-2x}$ y resulta la ecuación $\sqrt{1-2x} = \sqrt{x}$ cuya solución es $x = \frac{1}{3}$.



3.41.- Demuestre las siguientes identidades hiperbólicas:

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})] = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$



b) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$$\begin{aligned} \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}((e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}) + (e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)})) \\ &= \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}) \\ &= \sinh(x+y) \end{aligned}$$



c) $\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cosh x}{2}}$

$$\frac{1 + \cosh x}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{4} (2 + e^x + e^{-x}) = \frac{1}{4} \left(2 + \left(e^{\frac{x}{2}} \right)^2 + \left(e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2} \right)^2 = \cosh^2 \frac{x}{2},$$

como $\cosh x$ es una función positiva de la igualdad anterior se infiere, tomando raíz cuadrada a ambos lados, que $\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cosh x}{2}}$.



Funciones definidas implícitamente

3.42 Deduzca las ecuaciones definidas implícitamente por la ecuación $3xy - 3y^2 = 64$.

a) Teniendo a x como variable independiente:

Para despejar y de la ecuación, completemos cuadrados:

$$3xy - 3y^2 = 64 \Leftrightarrow y^2 - xy + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} = -64 \Leftrightarrow \left(y - \frac{x}{2} \right)^2 = -\frac{64}{3} + \frac{x^2}{4}$$

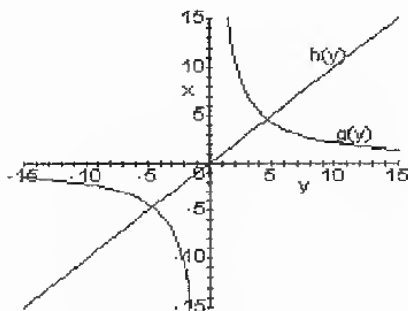
$$\Leftrightarrow y - \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - \frac{64}{3}} \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} \pm \frac{1}{6} \sqrt{9x^2 - 768}.$$

Se obtuvieron dos funciones:

$$y_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \sqrt{9x^2 - 768} \quad y \quad y_2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{9x^2 - 768}.$$

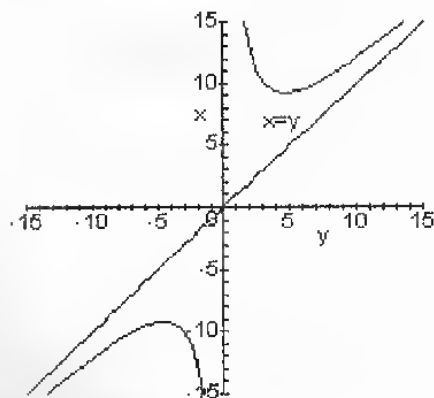
b) Teniendo a y como variable independiente:

Se despeja x de la ecuación: $x = y + \frac{64}{3y}.$



La función $F(y) = y + \frac{64}{3y}$ es la suma de las funciones

elementales $h(y) = y$ e $g(y) = \frac{64}{3y}$, por lo tanto será relativamente fácil construir el gráfico de la curva representada por la ecuación. Los gráficos de h y g se pueden construir en un mismo sistema de coordenadas para luego hacer una suma numérica punto a punto:



* Cerca del origen predominan los valores de g , los valores de h aportan muy poco a la suma.

* En cambio, cuando y se hace muy grande, predominan los valores de h , los valores de g son aproximadamente nulos y no aportan nada a la suma. La gráfica resultante de esta suma es la anexa.

PROBLEMAS PARA SER RESUELTOS POR EL ESTUDIANTE

1.- Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, calcular:

1.1 $f(0)$

1.2 $f(-2)$

1.3 $f(a)$

1.4 $f(a+1)$

2.- Dada la función $f(x) = \text{Log}(x+2)$, calcular:

2.1 $f(0)$

2.2 $f(-1)$

2.3 $f(10^3 - 2)$

1.4 $f(8)$

3.- Hallar los cinco primeros términos de las sucesiones:

3.1 $\{2\}$

3.2 $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

3.3 $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

3.4 $\left\{ \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right\}$

4.- Dar el término general de la sucesión cuyos primeros cuatro términos son:

4.1 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

4.2 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$

4.3 $1, 4, 7, 10, \dots$

5.- **Sucesión aritmética:** Sus términos se obtienen sumando al primer término a_1 una constante r (razón), es decir: $a_n = a_1 + (n-1)r$.

3.1 Hallar el vigésimo término de la sucesión aritmética que tiene como primer término 4 y como segundo 7.

3.2 Demuestre que la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética de razón r es

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

6.- **Sucesión geométrica:** Sus términos se obtienen multiplicando el término anterior por una constante r (razón), es decir, $a_{n+1} = ra_n$.

6.1 Demuestre que $a_{n+1} = a_1 r^n$.

6.2 Halle el tercer término de la sucesión geométrica cuyo quinto término es $\frac{3}{16}$ y el octavo es

$$\frac{3}{128}.$$

6.3 Demuestre que la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica es

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}.$$

Calcule la suma de los primeros 20 términos de la sucesión de la parte 6.2.

7.- Calcular el dominio de las siguientes funciones:

7.1 $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 4x + 1}$

7.2 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{3x-1}}$

7.3 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+4} + \sqrt[4]{x+3}$

7.4 $f(x) = \frac{x}{x^2 - |x|}$

8.- La teoría de la relatividad de Einstein relaciona la masa m de un cuerpo con su velocidad v , mediante la ecuación:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ donde } c \text{ es la velocidad de la luz.}$$

8.1 ¿Cuál es la masa del cuerpo en reposo?

8.2 Pruebe que ningún cuerpo puede viajar a velocidades superiores o iguales a la velocidad de la luz.

"El descubrimiento de la existencia en el mundo de la velocidad máxima es uno de los triunfos más grandes del pensamiento humano"

L. Landau (científico soviético).

9.- Pruebe que el producto y el cociente de dos funciones pares o de dos impares es una función par. El producto y el cociente de una función impar y otra par es una función impar.

10.- Pruebe que las siguientes funciones son pares:

10.1 $f(x) = |x|$

10.2 $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

10.3 $h(x) = 5$

10.4 $f(x) = \sec x$

11.- Pruebe que las funciones dadas a continuación son impares:

11.1 $f(x) = 2x - 3x^3$

11.2 $k(x) = \operatorname{tg} x$

11.3. $g(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$

11.4 $f(x) = x \cos x$

12.- Decida si las siguientes funciones son pares o impares. Justifique su respuesta.

12.1 $f(x) = x^5 + 5$

12.2 $g(x) = \operatorname{sen} x^2 + \cos x$

12.3 $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$

12.4 $f(x) = \frac{3x}{2x+4}$

12.5 $g(x) = \begin{cases} \operatorname{cosec} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \cos x & \text{si } x \leq -\pi \end{cases}$

12.6 $f(x) = 4x^3 + 2x^2$

12.7 $f(x) = e^{x^2} + \cos x$

12.7 $g(x) = x \operatorname{Ln} \left(\frac{2}{x^2} \right)$

13.- Las funciones f y g son periódicas de periodos P y P' respectivamente. Probar que si existen naturales m y n tales que $nP = mP'$ entonces la función $F(x) = f(x) + g(x)$ es periódica con periodo nP .

14.- Una función es periódica de período 5 y $f(x) = 2x+3$ si $0 \leq x < 5$, calcular $f(18)$.

15.- Construir el gráfico de una función par de periodo 6 tal que $f(x) = x^3$ si $0 \leq x \leq 3$.

16.- La función definida por $f(x) = \operatorname{Ln} x$ si $0 < x < e$, es impar y de periodo $2e$.

16.1 Construya su gráfico.

16.2 Calcular $f\left(-\frac{1+4e^2}{e}\right)$.

17.- Determinar cuáles de las funciones que se dan son periódicas y en los casos que corresponda, dar su período:

17.1 $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$

17.2 $f(x) = 3 \cos(3x - 1)$

17.3 $f(x) = \cos^2 x$

17.4 $f(x) = 5 + \operatorname{sen} x^2$

17.5 $f(x) = \operatorname{sen} 3x + \cos 4x$

17.6 $f(x) = x - [x]$

18.- Siendo $f(x) = |x-1|$, determinar dominio, rango y gráfico de:

18.1 $f(x+5)$

18.2 $f(-x)$

18.3 $f(1-x)$

18.4 $f(x+5) - 3$

18.5 $3 - f(1-x)$

18.6 $3f(-x)$

19.- Dada la función $f(x) = \operatorname{sen} \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$

19.1 Demuestre que $f(x) = \cos(2x)$.

19.2 Calcular $f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

19.3 Grafique la función f .

20.- Graficar las siguientes funciones:

20.1 $f(x) = -x^3$

20.2 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

20.3 $f(x) = \sin^2 x$

20.4 $f(x) = |\cos x|$

20.5 $f(x) = \frac{1}{x^2}$

20.6 $f(x) = e^{-x^2}$

20.7 $g(x) = \frac{x}{|x|}$

20.8 $h(x) = x - |x|$

20.9 $g(x) = |x^2 - 3|$

20.10 $h(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

20.11 $f(x) = 2 + \sin(3x - 6)$

20.12 $j(x) = \left| 2 - \sqrt{1-x^2} \right|$

20.13 $g(x) = -2 - e^{x+1}$

20.14 $f(x) = 2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{8}\right)$

21.- Determinar si es posible realizar la composición $f \circ g$ y $g \circ f$ entre las funciones que se dan a continuación, en caso de ser posible, obtenga la respectiva regla de correspondencia:

21.1 $f(x) = x^2$

$g(x) = \sqrt{x+1}$

21.2 $f(x) = x^2$

$g(x) = \sqrt{-1-x}$

22.- Representar las funciones siguientes como composición de funciones elementales:

22.1 $f(x) = \cos^2(x+3)$

22.2 $f(x) = \left| \frac{1}{x^3-1} \right|$

22.3 $h(x) = 1 + e^{(x-1)^3}$

22.4 $g(x) = \sqrt[3]{\sin(x-2)^2}$

22.5 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4^{(x-4)}}}$

23.- La función f tiene como dominio el intervalo $[-1, 1]$. Determinar el dominio de $f \circ g$ siendo:

23.1 $g(x) = |x|$

23.2 $g(x) = \sin x$

23.3 $g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 0 \\ x-3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

23.4 $h(x) = \ln x$

24.- Probar que las siguientes funciones tienen función inversa y calcularla:

24.1 $f(x) = x^3 - 1$

24.2 $g(x) = \sqrt{x+1}$

24.3 $f(x) = \frac{x}{x+1}$

25.- ¿Qué restricciones se pueden hacer al dominio de las siguientes funciones para que admitan inversa?

25.1 $f(x) = x^2 + x + 1$

25.2 $f(x) = \cos \frac{x}{4}$

25.3 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

26.- Demuestre que f y g son inversas una de la otra:

26.1 $f(x) = \sin(2x+1)$, $g(x) = \frac{1}{2}(-1 + \arcsin x)$

26.2 $f(x) = \ln(x-1)$, $g(x) = e^x + 1$

26.3 $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$, $g(x) = \frac{1}{2} \log_3 \left(\frac{1+x}{x-1} \right)$

27.- Pruebe las siguientes propiedades de la función logaritmo:

27.1 $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

2.1 $\log 2 \approx 0.301$

3.1 $2, 2, 2, 2, 2$

4.1 $\frac{1}{2n}$

5.1 $a_{20} = 61$

7.1 $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2} \right\}$

12.1 No es par ni impar

12.5 No es par ni impar. $D(g)$ no es simétrico respecto del origen.

12.7 Es par

2.3 3

3.3 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

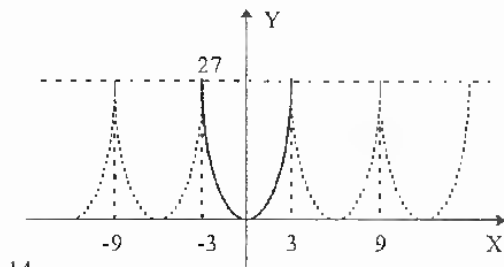
4.3 $3n+1$

6.3 $S_{20} = \frac{3145.725}{524.288}$

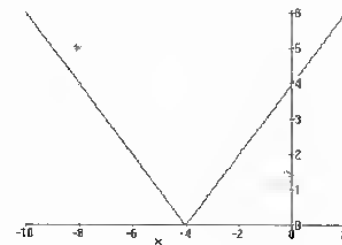
7.3 $[-3, -1] \cup [1, \infty)$

12.3 Es impar

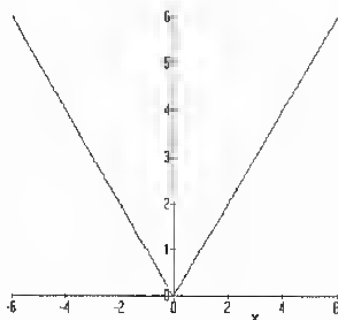
14 $f(18) = f(3) = 9$



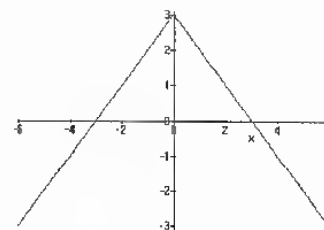
14



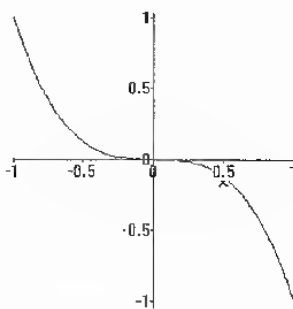
18.1



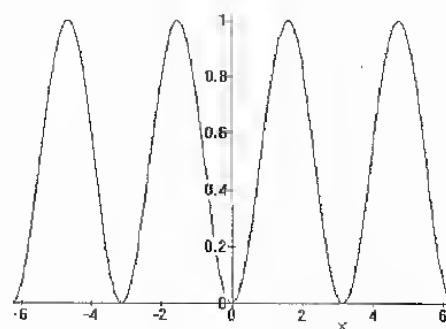
18.3



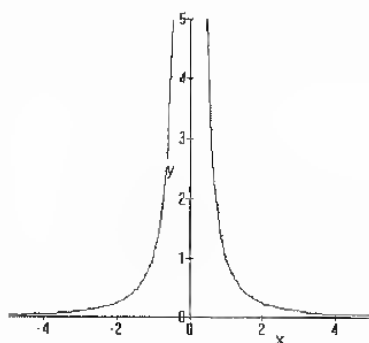
18.5



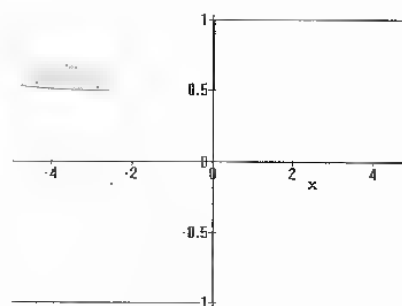
20.1



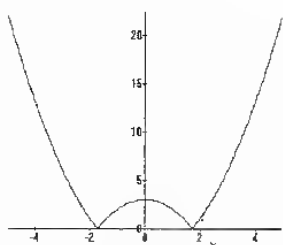
20.3



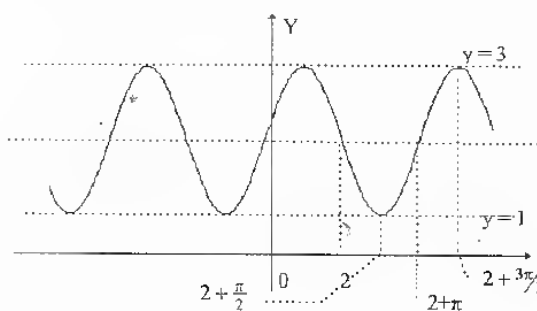
20.5



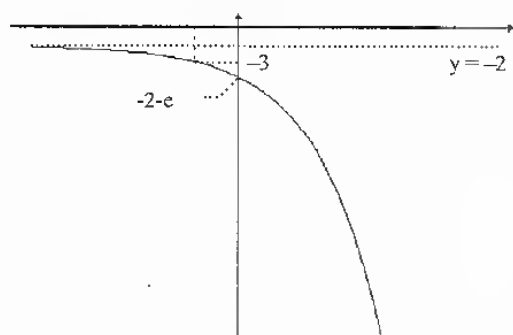
20.7



20.9



20.11



20.13

$$21.1 \quad ((f \circ g)(x) = x + 1 \quad ; \quad D(f \circ g) = [-1, +\infty) \quad ; \quad (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad ; \quad D(g \circ f) = \mathbb{R}$$

$$22.1 \quad h(x) = x^2, \quad g(x) = \cos x, \quad p(x) = x + 3; \quad f = h \circ g \circ p$$

$$22.3 \quad f(x) = 1 + e^x, \quad g(x) = x^3, \quad p(x) = x - 1; \quad h = f \circ g \circ p$$

$$22.5 \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = \sqrt{x}, \quad p(x) = 4^x, \quad q(x) = x - 4; \quad g = f \circ h \circ p \circ q$$

$$23.1 \quad [-1, 1]$$

$$23.3 \quad [-4, -2] \cup [2, 4]$$

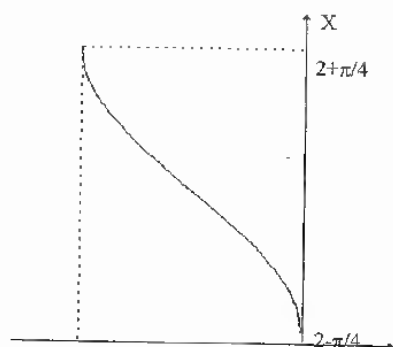
$$24.1 \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$$

$$24.3 \quad f^{-1}(x) = -\frac{x}{x - 1}$$

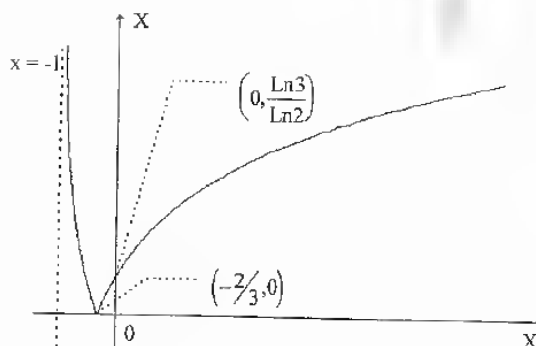
$$29.1 \quad f(x) = \cos(x^2 - 2x)$$

$$29.3 \quad g(x) = \sqrt[3]{\frac{8 + 10e^{\cos x}}{9e^{\cos x} - 7}}$$

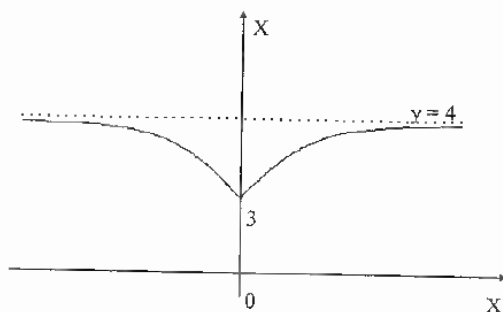
$$29.5 \quad f(x) = \ln(5 + \arcsin x)$$



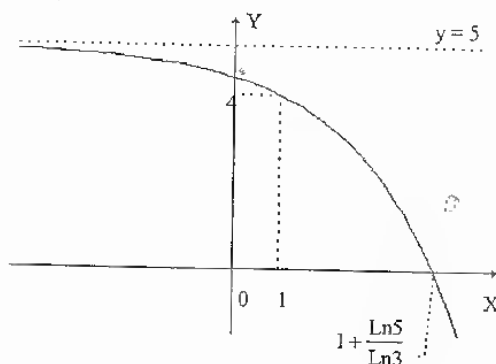
31.1



31.3



31.5



31.7

32.1 $\log_4(1+\sqrt{2})$

32.3 $-\pi/8$

32.5 ± 1

32.7 $\frac{1}{2} \ln 2$

32.9 $\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ y $\ln(-\sqrt{2}+\sqrt{3})$

33.1 $(f \circ g)(x) = |x|$; $D(f \circ g) = \mathbb{R}$ y $(g \circ f)(x) = x$; $D(g \circ f) = [0, \infty)$

33.3 $(f \circ g)(x) = \begin{cases} \ln(x-2) & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ \ln(9-x^2) & \text{si } x > 3 \end{cases}$ y $(g \circ f)(x) = \begin{cases} -2 + \ln x & \text{si } 0 < x \leq e^3 \\ (\ln x)^2 - 9 & \text{si } x > e^3 \end{cases}$

35.1 $(-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

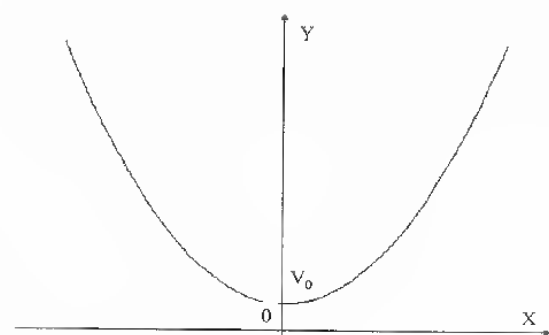
35.3 $[-3, -2]$ 35.5 $(-\infty, -2]$

35.7 $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$

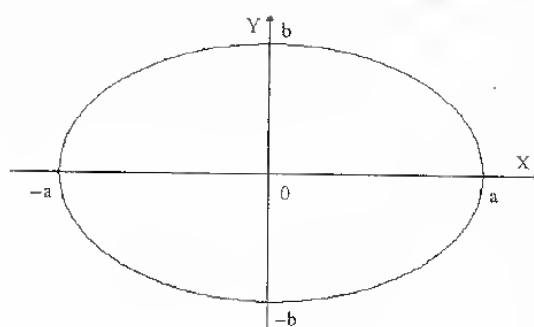
37.1 $y = 1 \pm \sqrt{4-x^2}$

37.3 $y = \ln(e^{-x} - 1) - 1$

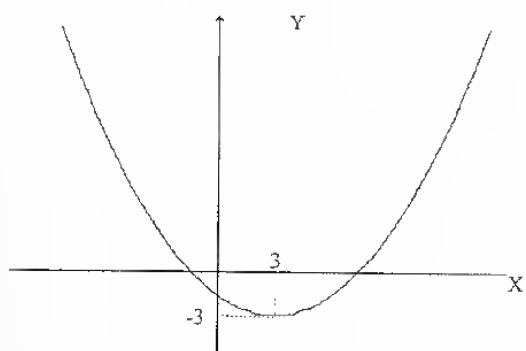
37.5 $y = 4x + \frac{25}{x}$; $x = \frac{1}{8} \left(y \pm \sqrt{y^2 - 400} \right)$



38.1



38.3



38.5

39.1 $x=c$, $y=t$ con $t \in \mathbb{R}$

4 LÍMITES Y CONTINUIDAD

BREVES NOTAS HISTÓRICAS DE LA CONCEPCIÓN DE LÍMITE Y OTROS

“No sé lo que el mundo pensará de mí, pero a mí me parece ser tan sólo un muchacho que juega en la playa y que se divierte al encontrar un canto rodado o una concha más hermosa que de ordinario, mientras que el gran océano de la verdad yace ante mis ojos sin descubrir”

ISAAC NEWTON

La puerta de la bóveda del conocimiento no se abre si no hay una fuerza que la empuja. El hombre puede encontrar escollos en su sendero histórico, pero alguna estrella, luz o magia le indicará cómo salirse de esa inactividad momentánea. La inercia propia de la Edad Media en todos los órdenes intelectuales entra en agonía; la imperiosa necesidad de un progreso en algunos aspectos técnicos conspiraban para plantear nuevos problemas a los matemáticos:

A finales del siglo XV, los viajes en alta mar necesitaban de nuevos esquemas e instrumentos de orientación, mapas y datos astronómicos, lo cual induce el desarrollo de la trigonometría. Pero la expansión de la astronomía impulsa, a su vez, novedades científicas que revolucionarían el mundo intelectual de la época, al grado de convertirse en un principio del final del orden social establecido.

En el siglo IV a. C. el filósofo griego Aristóteles estableció la teoría según la cual el Universo estaba limitado por esferas celestes en las que permanecían fijas las estrellas y planetas, que giran alrededor de su centro: la Tierra (geocentrismo). Algunos siglos después, II de nuestra era, el reputado astrónomo griego que vivía en Alejandría, Claudio Ptolomeo, reafirma esas especulaciones filosóficas con ligeras modificaciones. Por espacio de

un milenio, las obras de Ptolomeo sirven de fundamento al saber astronómico y astrológico, es la teoría aceptada por los escolásticos. Afortunadamente en la Edad Moderna, algunos estudiosos empiezan a usar nuevos parámetros para establecer resultados en la filosofía natural. La teoría de Ptolomeo no solamente es puesta en tela de juicio, sino que el astrónomo polaco **Nicolás Copérnico (1473-1543)**, después de una observación reflexiva de la bóveda celeste, lanzó al mundo una nueva conjetura: los planetas se mueven sobre sí mismos y alrededor del Sol en órbitas circulares. Esta nueva teoría, heliocentrismo, contraria a un orden ya multiseglar, es rechazada y condenada como herética por los detentores del conocimiento: la iglesia de Roma. La obra de Copérnico “Sobre el movimiento de los cuerpos celestes” se publicó en 1.630.

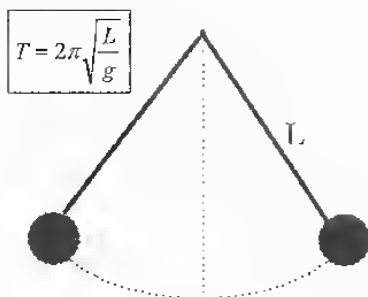
Durante los cien años posteriores, varios científicos hicieron aportes para precisar el movimiento planetario. El astrónomo alemán **Johannes Kepler (1571-1630)**, ayudado por los conocimientos heredados de otro insigne astrónomo Danés Tycho Brahe (1546-1601) decidió abandonar el legado de Copérnico de que los planetas se movían alrededor del Sol en órbitas circulares y demostró las conocidas *Leyes de Kepler*:

- 1) *Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del sol y éste ocupa uno de los focos.*
- 2) *El radio vector formado por el sol y el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.*
- 3) *El cuadrado del periodo de un planeta es proporcional al cubo de su distancia al sol.*

La “Nueva astronomía” de Kepler se publicó en 1609. Podemos observar que ahora los resultados vienen expresados usando términos fuertemente matemáticos.

En este dilucidar de la danza astronómica, merece mención especial uno de los gigantes del pensamiento Universal, el Florentino **Galileo Galilei (1564 - 1642)**. Es tan vasto su legado científico que aquí se indicarán solamente sus actividades relacionadas con el tema.

Al observar el vaivén de una lámpara en la catedral de Pisa, y midiendo su movimiento por el ritmo del pulso, Galileo sospechó que todas las oscilaciones, sin importar su amplitud, duraban lo mismo. Este genio, iniciador del experimentalismo, fabricó su propio péndulo de laboratorio y, por medio de cuidadosas mediciones, encontró que el periodo T del péndulo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de la cuerda que sostiene la “lenteja”, no depende de la masa de ésta ni de la longitud de la oscilación.



El principio físico para la construcción de relojes de péndulo formaba ahora parte del conocimiento de la humanidad, no obstante solamente un siglo después, el holandés Christian Huygens (1629-1695) desarrolló la mecánica necesaria para hacerlos funcionar.

Con estos resultados vinculó otro fenómeno: se cree que Galileo al dejar caer cuerpos de diferente masa desde la torre de Pisa llegó a la conclusión de que éstos caen a la misma velocidad. Determinó experimentalmente que la longitud recorrida por un cuerpo inicialmente en reposo y en el vacío está dada por la ecuación, que hoy día se escribe así:

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

En Venecia (1609), Galileo construyó su pequeño telescopio astronómico; al dirigirlo a los cielos el hombre, intuyó por primera vez las enormes distancias estelares y se persuadió de que Copérnico se hallaba en lo cierto, al presumir que el Sol era el centro del Universo. Escribió en apoyo a esta teoría y para describir el movimiento de los cuerpos, el tratado "*Diálogo de los Dos Sistemas Máximos del Mundo*", que encontró una tenaz oposición de las autoridades eclesiásticas. Es llevado ante el tribunal de la Santa Inquisición y en 1633 es juzgado y obligado a abjurar de la doctrina de Copérnico y Kepler. Son famosas las palabras que se le atribuyen:

"E pur, si muove!"

También escribió Galileo: "cualquier velocidad, una vez que se imparte a un cuerpo en movimiento, será mantenida rigidamente siempre que se hayan eliminado las causas externas del retraso". Con ello, abrió el camino que llevará a la formulación futura del principio de inercia.

Después de Copérnico, Kepler y Galileo, el mundo científico aceptaba el movimiento de los planetas en órbitas elípticas alrededor del Sol, no obstante, ninguno de ellos llegó a averiguar el porqué.

El 8 de enero de 1642 muere en Florencia, ciego, bajo arresto domiciliario y derrotado, al menos moralmente, Galileo Galilei. Ese mismo año, el 25 de diciembre, nace otra de las inteligencias supremas de la raza humana, Isaac Newton (1642-1727). ¿Cree usted en la reencarnación?

Newton sabía que debía actuar alguna fuerza sobre los planetas. En el caso de la Luna, si ésta era demasiado pequeña no la podría desviar de su trayectoria rectilínea y si fuera demasiado grande la haría caer a la Tierra. La leyenda dice que Newton concibió la ley de gravitación Universal al meditar sobre la caída de una manzana en Woolsthorpe, su tierra natal, donde estaba recién graduado (1665) del Trinity College de Cambridge, y debido a que la universidad estaba cerrada por la peste bubónica. La historia es fundamentalmente correcta en el sentido de que Newton asocia los fenómenos de la manzana y la Luna bajo una misma ley mecánica (*ley de gravitación Universal*), de ahí su grandeza:

“Dos cuerpos se atraen con una fuerza que es directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de sus centros de gravedad.”

Newton unificó el movimiento en tres leyes que habían sido, las dos primeras, esbozadas por Galileo:

1) *Ley de inercia: Todo cuerpo continuará en su estado de reposo o de movimiento uniforme (no acelerado), en línea recta en tanto que no sea obligado a cambiar ese estado por una fuerza exterior.*

2) *Cambio de la cantidad de movimiento: La razón del cambio del momentum (cantidad de movimiento) es proporcional a la fuerza aplicada y tiene lugar en la dirección en que la fuerza actúa.*

Si la masa permanece constante durante el movimiento tenemos su forma “más conocida”: $\vec{F} = m\vec{a}$

3) *Principio de acción -reacción: A cada acción siempre se opone una reacción igual y se dirigen en sentidos opuestos.*

Otro acontecimiento que contribuye al progreso de la matemática es la introducción de la artillería en el arte militar, que trajo como consecuencia el estudio minucioso del movimiento de los proyectiles. Se debe a Galileo la observación de que sus trayectorias son parábolas. Era de vital importancia un estudio cuantitativo de este movimiento, pues de un disparo preciso dependía la ubicación de una frontera o la corona de un rey, en la disputa guerrera que mantenían los Estados Europeos.

Mencionaré brevemente algunas de las implicaciones matemáticas de los aspectos científicos anteriores, donde algunos desarrollos representan por sí mismos un avance en las matemáticas otros usan o introducen en forma intuitiva conceptos que con el devenir de los tiempos, una vez precisados, se convirtieron en ramas autónomas dentro de las matemáticas.

Como se dijo antes, hasta el siglo XV, el desarrollo de las matemáticas se centró primordialmente en la confección de tablas trigonométricas como parte del progreso de la astronomía en apoyo a la navegación y

construcción. Trabajaron en ello, entre muchos otros, Copérnico (1473-1543), Rheticus (1514 - 1576) alumno de Copérnico, Viète (1540-1603), Kepler (1571-1630), etc. Los esfuerzos y dificultades fueron grandes porque, entre otros obstáculos, no usaban fracciones decimales, sino enteros y fracciones simples. Viète por ejemplo, para la determinación de $\sin 1^\circ$ llevó los cálculos hasta la búsqueda del lado del polígono regular inscrito de 3×2^{11} y el circunscrito de 3×2^{12} lados. Recuerde que los cálculos se hacían prácticamente a mano.

La introducción de letras para representar magnitudes físicas o en ecuaciones algebraicas toma forma a finales del siglo XVI y solamente con Viète se hace costumbre designar todos los elementos de un problema o de una ecuación con letras. Hasta entonces, las ecuaciones resueltas en los tratados tenían, por lo general, coeficientes numéricos, aún cuando representaran una misma ley. En el problema del péndulo, en la descripción de la caída libre de los cuerpos, en las leyes del movimiento de los astros y cuerpos, etc., aparecen cantidades que dependen de otras. El concepto de variable así como el de función se iban incubando lentamente, no surgieron en forma definitiva en la mente de Galileo, Descartes o Newton, sino que ellos las usaban y representaban en forma intuitiva. La introducción definitiva del término **función** y el símbolo correspondiente $y = f(x)$ en las matemáticas (1694) se debe al genio alemán **Gottfried Leibniz** (1646 - 1716) y su precisión ha sido labor de muchos matemáticos posteriores.

La segunda ley de Newton funciona como el percutor de la rama de las matemáticas conocida como **Cálculo infinitesimal** o bien Cálculo diferencial e integral. Newton investiga la razón de cambio del momentum que conduce a una descripción exacta de la velocidad como una razón de cambio de la posición respecto del tiempo.

A este fin, si f es la posición de un cuerpo con movimiento rectilíneo, Newton utiliza la vocal "o" (*cantidad desvaneciente*) como si fuera un símbolo algebraico determinado que representa una cantidad finita.

Forma el cociente incremental (razón de cambio de la posición respecto del tiempo):

$$\frac{f(t + o) - f(t)}{(t + o) - t}$$

En las fórmulas que se obtienen al desarrollar algebraicamente este cociente, Newton omite todas las cantidades que contienen "o" como factor. El término así obtenido es la velocidad instantánea del cuerpo. Veamos este proceso aplicado a la caída libre:

La posición en caída libre desde el reposo viene dada según Galileo por $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

$$\frac{f(t+o) - f(t)}{(t+o) - t} = \frac{\frac{1}{2}g(t+o)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{(t+o) - t} = \frac{tgo + \frac{1}{2}go^2}{o} = tg + \frac{1}{2}go.$$

Se tiene la velocidad instantánea omitiendo el término que contiene el símbolo algebraico "o": $V = gt$.

Newton bautiza este tipo de cálculo con el nombre de **cálculo de fluxiones** de la idea de "fluir" o cantidades variables. Se debe observar que este tipo de cálculo había sido iniciado por otros matemáticos tales como Fermat y Barrow en el problema de hallar tangentes y áreas encerradas por una curva arbitraria. Hasta entonces, solamente para curvas con propiedades geométricas conocidas se podían calcular tangentes y áreas, Newton tomó las ideas de la época, en particular las de su maestro Barrow, y las cristalizó; un manuscrito fechado el 20 de Mayo de 1665 muestra que él, a la edad de 23 años, había desarrollado suficientemente los principios de este nuevo Cálculo.

No se puede dejar de mencionar de nuevo a Leibniz, quien según la historia, desarrolló independientemente de Newton el Cálculo infinitesimal; hoy no hay duda de que así fue, sin embargo, para la época surgieron encendidas discordias acerca de la prioridad del descubrimiento. Este hombre, entre muchos otros campos mostró su genialidad en las matemáticas, introdujo parte de la simbología que se usa hoy día, como por ejemplo $\frac{dy}{dx}$ (derivada) para el resultado final del proceso que se hace con el cociente incremental. Leibniz perseguía, como también lo hizo Descartes, dotar las matemáticas de una simbología que le permitiera construir el aparataje matemático bajo un esquema lógico; en este sentido, se le puede tener como el precursor de la Lógica.

Nota:

El cociente incremental planteado por Newton se conoce hoy día con el nombre de **velocidad media**.

Recuerde

$$V_{\text{media}} = \frac{\text{Posición final} - \text{posición inicial}}{\text{Tiempo transcurrido}} = \frac{f(t+o) - f(t)}{o}$$

Observe que si en el cociente incremental el símbolo algebraico "*desvaneciente*" se hace cero, obtendríamos el símbolo sin sentido $\frac{0}{0}$, que hoy día se conoce con el nombre de indeterminación. El proceso de eliminar al final todos los términos contentivos del símbolo algebraico, *desvaneciente*, a pesar de ser no nulo, no pudo ser suficientemente explicado por Newton. Esta fue una de las causas de que Newton publicara sus resultados, obtenidos alrededor del año 1665 en la mecánica clásica, veinte años después en "*Principios matemáticos de la filosofía natural*". Se debe acotar que en esta publicación hay una primera parte dedicada al cálculo de fluxiones; sin

embargo, sus resultados de mecánica clásica están escritos sin la aplicación de los métodos de la teoría de fluxiones, aunque muchos de ellos fueron obtenidos inicialmente mediante los recursos de esta nueva teoría.

Es admirable que estas colosales investigaciones se deban a un solo hombre, a pesar de su genialidad; pareciera que Newton lo advirtió al dar la siguiente explicación:

“ Si he ido algo más lejos que los otros, ello es debido a que me coloqué sobre los hombros de gigantes”

Se refería a Descartes, Kepler y Galileo:

De Descartes heredó la Geometría Analítica, en la que al principio encontró dificultades.

De Kepler, las tres leyes fundamentales del movimiento planetario descubiertas empíricamente después de 22 años de cálculos sobrehumanos.

De Galileo heredó la concepción inicial de las dos primeras leyes que iban a ser la piedra angular de sus investigaciones.

Antes de que se esfume, regresemos al término muy bien llamado “*desvaneciente*”. Fundamentalmente la eliminación de los términos *desvanecientes* dio lugar a la Teoría de límites; muchos matemáticos trabajaron en su elaboración a finales del siglo XVIII, entre ellos, L. Euler (1707-1783) y A. Cauchy (1789-1857). La teoría de límites que se iba formulando no obtuvo reconocimiento inmediato, se prestó demasiada atención a que con el concepto de límite no es posible vincular ningún algoritmo para su determinación, crítica hecha por los matemáticos que trabajaban en problemas aplicados, como por ejemplo el Francés Poisson (1781-1840). Finalmente, hacia el año de 1880, fue elaborada la forma actual de las definiciones y el aparato demostrativo basado en razonamientos condicional-deductivos (*Dado $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$, tal que...*) y el simbolismo correspondiente. Ésta es la forma actual de la definición formal de límite. El matemático alemán K. Weierstrass (1815-1897) es uno de los autores fundamentales en la precisión y claridad del concepto de límite.

Pasemos de la historia a la idea geométrica de límite:

Con las nociones fundamentales de *variable*, *función* y *límite*, el cálculo había levantado vuelo y cuatro siglos de uso continuo de él no han logrado agotar esta incomparable herramienta que se usa en la modelación de los más diversos problemas que van de los físicos, geométricos, ingenieriles y hasta sociales.

Las ideas primigenias de velocidad y recta tangente a una curva no son las únicas que conducen al concepto de límite. Muchos problemas se traducen al lenguaje de las matemáticas a través de una función, para luego estudiar su comportamiento en el entorno de un punto o bien cuando la variable se hace muy grande. Esto es equivalente a preguntar:

¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando la variable x se acerca a x_0 ?

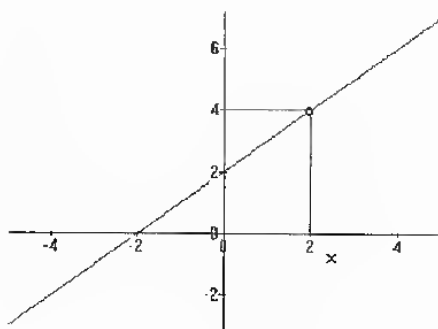
Con la finalidad de clarificar la idea geométrica de la pregunta, veamos dos ejemplos:

I) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando la variable se acerca a 2? Afortunadamente podemos reescribir la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = x+2 \quad \text{si} \quad x \neq 2;$$

y dibujar su gráfico que son dos semirectas:



Se puede observar que los valores de la función se aproximan a 4, cuando la variable se acerca a 2. En terminología matemática, diremos que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a dos es cuatro**, lo cual se denota por:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

Muy importante es notar que se ha calculado el límite de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ cuando x tiende a 2 a pesar de que la función no está definida en dicho número.

II) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

La función tiene como dominio el conjunto de los números reales **excepto el cero**, sin embargo:

¿A qué valor se aproxima $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ cuando x se aproxima a cero?

Notemos, además, que el cociente para $x = 0$ da $\frac{0}{0}$, que no es una operación algebraica válida. Ésta y otras expresiones que veremos posteriormente se conocen con el nombre de **indeterminaciones**. Por ahora, veremos si la

pregunta tiene sentido y respuesta, en una forma un tanto empírica, simplemente evaluando la función en números que se van acercando a cero (importante, tanto por la derecha como por la izquierda):

x	f(x)
$\frac{1}{10}$	0.998334
$\frac{1}{50}$	0.999933
$\frac{1}{100}$	0.999999
↓	↓
0	1

x	f(x)
$-\frac{1}{10}$	0.998334
$-\frac{1}{50}$	0.999933
$-\frac{1}{100}$	0.999999
↓	↓
0	1

Intuimos que los valores de $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ se acercan a 1 cuando la variable se acerca a 0, o sea el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 0 es 1, lo cual se denota por:

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Es fácil darse cuenta de que entre $\pm \frac{1}{100}$ y cero hay tantos números como queramos, digámoslo de otra forma, entre un

número x_0 y cero, por muy pequeño que sea este, siempre hay otro, por ejemplo $\frac{x_0}{2}$. La tarea de evaluar la función $g(x)$

en los números que se acercan a cero no es finita, “es un proceso de límite”. No podemos, con las herramientas que se manejan, a estas alturas del curso, dar el gráfico de $g(x)$ para ver si nuestras sospechas son ciertas; más adelante demostraremos que efectivamente el resultado (*) es verdadero.

Generalmente, en el cálculo de límites se presentan indeterminaciones, “operaciones no válidas”, y para su determinación se hará uso de límites llamados “límites notables”, como por ejemplo el anterior y otras veces es necesario algún procedimiento algebraico previo.

La idea geométrica:

los valores de una función $f(x)$ se acercan a L cuando la variable x se acerca a x_0 , se denota por:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

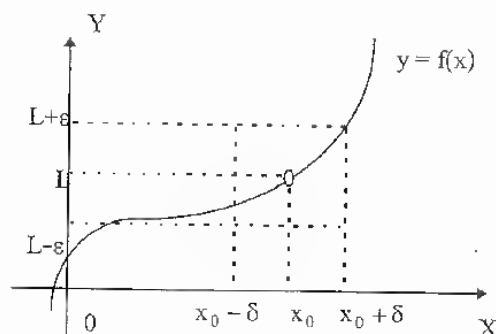
y tiene su formalización matemática:

4.1 Definición de límite

La función $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, (D es el dominio de f), tiene límite L cuando x tiende a x_0 si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Simbólicamente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall x \in D) \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$



4.2 Teorema (Unicidad del límite)

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

4.3 Algebra de límites

Sean f y g funciones tales que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}$)

entonces:

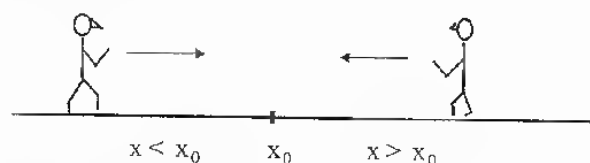
$$i) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{con } L_2 \neq 0$$

4.4 Límites laterales

Cuando escribimos el símbolo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ no especificamos por cuál lado nos aproximamos a x_0 , hay dos formas de hacerlo:



Teniendo esto en cuenta, introducimos dos "nuevos" conceptos:

4.5 Definición (Límite lateral derecho)

La función $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, (D es el dominio de f), tiene límite L cuando x tiende a x_0 por la derecha si y solo si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x \in D$ y $x_0 < x < x_0 + \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Simbólicamente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) \quad (\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0) \quad (\forall x \in D) \quad (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

4.6 Definición (Límite lateral izquierdo)

La función $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, (D es el dominio de f), tiene límite L cuando x tiende a x_0 por la izquierda si sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in D$ y $x_0 - \delta < x < x_0$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Simbólicamente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall x \in D) \quad (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

4.7 Teorema

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ si y sólo si existen los límites laterales y además } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Del enunciado del teorema anterior, se infiere que si existen los límites laterales y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ no existe.

4.8 Teorema (Del sandwich)

Sean f, g, h funciones tales que $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ con $a > 0$, y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

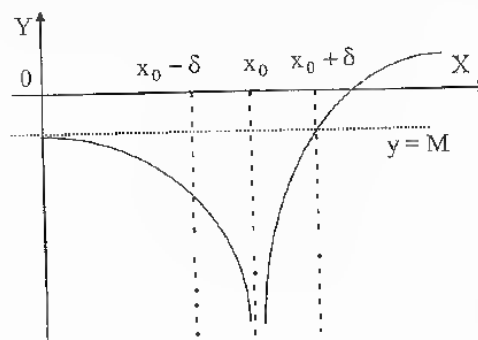
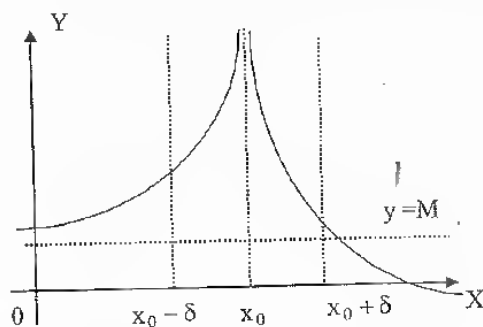
4.9 Límite notable

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Para su deducción véase el ejercicio 4.12

4.10 Límites infinitos

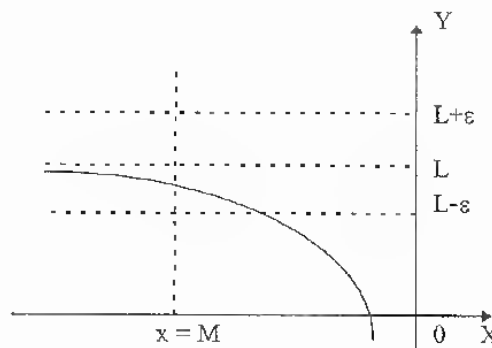
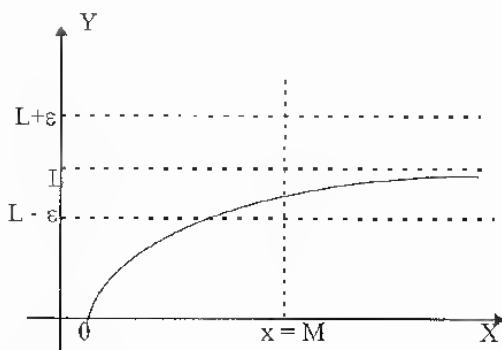
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow (\forall M > 0) \quad (\exists \delta = \delta(M) > 0) \quad (\forall x \in D) \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow (\forall M < 0) \quad (\exists \delta = \delta(M) > 0) \quad (\forall x \in D) \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M) \end{aligned}$$



4.11 Límites en el infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists M(\varepsilon) > 0) \quad (\forall x \in D) \quad (x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists M(\varepsilon) < 0) \quad (\forall x \in D) \quad (x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$



4.12 Teorema

Si f es una función creciente y acotada superiormente por el número M entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, donde $L \leq M$.

4.13 Límite de una sucesión (Convergencia)

Este concepto es el mismo de límites en el infinito siendo f una sucesión, es decir que la variable es un número natural; adaptando las notaciones a esta circunstancia se tendrá:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) > 0 \quad \text{tal que si } n > N \quad \text{entonces } |a_n - L| < \varepsilon$$

Diremos, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ existe y es igual a L , que la sucesión a_n converge a L .

¿Tiene sentido para una sucesión $\lim_{n \rightarrow 6} a_n$? ¿Por qué? (Suponga que a_n está definida para $n=6$).

4.14 Teorema

Sea f una función con dominio $D(f)$ y $\{x_n\} \subset D(f)$ una sucesión, tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$.

Podemos abreviar el enunciado del teorema de la siguiente forma:

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ entonces el límite de la función calculado a través de cualquier sucesión que converja a x_0 debe dar L .

Este teorema es particularmente útil para demostrar que algunos límites no existen:

Se toman dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ diferentes que converjan a x_0 , si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ no existe. También es válido el mismo resultado si se reemplaza x_0 por $\pm\infty$.

4.15 Algunas propiedades de límites infinitos

Se debe tener en cuenta que $\pm\infty$ son solamente símbolos, por lo cual no están permitidas operaciones algebraicas que los incluyan.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+ \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 0 \\ -\infty & \text{si } L < 0 \end{cases}$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = +\infty$
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 0 \\ -\infty & \text{si } L < 0 \end{cases}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } L > 0 \\ +\infty & \text{si } L < 0 \end{cases}$

Las propiedades anteriores son válidas si reemplazamos x_0 por $\pm\infty$ y también para límites laterales.

4.16 Indeterminaciones

Los límites que producen "resultados" tales como:

$$+\infty - \infty ; 0 \cdot \pm\infty ; \frac{\pm\infty}{\pm\infty} ; 1^\infty ; \frac{0}{0} ; 0^0 ; \infty^0$$

se conocen con el nombre de "indeterminados" y requieren algún procedimiento algebraico adicional para su determinación, del uso de límites notables, o bien alguna otra herramienta matemática.

4.17 Otro límite notable

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Su demostración se puede encontrar en los ejercicios 4.28 y 4.29

4.18 Definición de continuidad:

Una función $f(x)$ es **continua** en x_0 si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

- 1.- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe y es finito.
- 2.- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Si f no cumple alguna de las dos condiciones anteriores se dice que es **discontinua** en x_0 . Una función se dice **continua** si ella es continua en cada punto de su dominio. Observe que para hablar de continuidad en un punto x_0 la función debe estar definida en dicho punto.

Si la segunda condición no se satisface se dice que la discontinuidad en x_0 es **evitable** y se puede definir una función continua a partir de f , de la siguiente forma:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases},$$

en caso contrario es **no evitable**.

Se dirá que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si y sólo si ella es continua en cada punto interior al intervalo y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

4.19 Teorema

Sean f y g funciones continuas en x_0 , entonces las funciones $f \pm g$, cf , fg , f/g con $g(x_0) \neq 0$, son continuas en x_0 .

4.20 Límite de la función compuesta

Si f es continua en L y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = f(L).$$

4.21 Teorema de los valores intermedios

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua en $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y c es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe, al menos, un número real $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

4.22 Corolario

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe un número real $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$.

4.23 Teorema de los valores extremos

Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre $[a, b]$. Esto es, existen números x_1, x_2 en $[a, b]$ tales que:

$$a) \ f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$b) \ f(x_2) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

4.24 Método de bisección

Este método permite encontrar la raíz de una ecuación en un intervalo, localizada por el teorema de los valores intermedios, con el grado de aproximación que se quiera.

Paso 1: Escójase el intervalo inicial $[a, b]$ de forma tal que la función cambie de signo y sea continua en él. Esto se verifica si $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Paso 2: La primera aproximación a la raíz puede ser el punto medio: $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Paso 3: * Si $f(x_0) = 0$, entonces la raíz es x_0 .

** Si $f(a) \cdot f(x_0) < 0$ la raíz está en el subintervalo de la izquierda. Ponga $b = x_0$ y siga en el paso

*** Si $f(b) \cdot f(x_0) < 0$ la raíz está en el subintervalo de la derecha. Ponga $a = x_0$ y siga en el paso

Paso 4: $|b - a| < \text{error}$.

* Si la proposición anterior es verdadera se da como raíz estimada el punto medio, $x_0 = \frac{a+b}{2}$,

(aquí el x_0 ya no es el mismo del paso 2), y el proceso iterativo se para.

** Si la proposición es falsa, regrese al paso 3.

EJERCICIOS RESUELTOS

Acerea de la prueba de límites por definición:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ simboliza el hecho geométrico de que $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a x_0 , lo cual se formaliza matemáticamente a través de la definición dada de límite; probar que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ es verificar que se cumple la definición. ¿Qué significa esto?

Dado $\varepsilon > 0$ se debe probar que existe (encontrar) δ tal que si

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

¿Cómo encontrar δ si conocemos ε ?

Se puede tratar de seguir los siguientes pasos:

$$|f(x) - L| = \left\{ \begin{array}{c} \text{Expresión en } x \\ x \end{array} \right\} \cdot |x - x_0| \quad (1)$$

$$\leq \{ \text{Número} \} \cdot |x - x_0| \quad (2)$$

$$< \{ \text{Número} \} \cdot \delta \quad (3)$$

$$\leq \varepsilon \quad \text{siempre que } 0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{\{ \text{Número} \}} \quad (4)$$

(1) El término $|f(x) - L|$ lo descomponemos en una expresión en x multiplicada por $|x - x_0|$.

(2) Usando $|x - x_0| < \delta$, acotamos la expresión en x por un número positivo, en el cual puede o no aparecer δ .

(3) Recordar que $|x - x_0| < \delta$. Se iguala este término a ε y se despeja δ .

(4) Cualquier otro valor para δ positivo y menor que el encontrado en el paso anterior, también sirve.

4.1 Probar que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$.

Se repiten los pasos dados anteriormente para la función $f(x) = 3x + 1$, $L = 7$ y $x_0 = 2$. Dado un $\varepsilon > 0$ queremos encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(3x + 1) - 7| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} |(3x + 1) - 7| &= |3x - 6| \\ &= 3|x - 2| \\ &< 3\delta \\ &\leq \varepsilon \end{aligned} \quad \text{siempre que } 0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$



4.2 Pruebe que el límite de $f(x) = x^2 - 25$ cuando x tiende a 1 existe y es igual a -24 .

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |x^2 - 25 + 24| = |x^2 - 1| \\ &= |(x+1)(x-1)| \\ &= |x+1||x-1| \end{aligned}$$

Queremos acotar $|x+1|$ por un número:

Elegimos $\delta = 1$, (valor para δ auxiliar) entonces

$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1$$

$$\Leftrightarrow 1 < x+1 < 3$$

$$\Leftrightarrow 1 < |x+1| < 3.$$

$$< 3|x-1|$$

$$< 3\delta$$

$$\leq \varepsilon$$

Igualemos este término a ε : $3\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon/3$.

siempre que $0 < \delta \leq \varepsilon/3$.

El δ a encontrar debe ser por lo tanto el menor entre los valores 1 y $\varepsilon/3$: $0 < \delta \leq \min\{1, \varepsilon/3\}$.



4.3 Siendo $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$, encontrar δ tal que si $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) + 4| < 0,01$.

$$\begin{aligned} |f(x) + 4| &= \left| \frac{x^2}{x-3} + 4 \right| \\ &= \left| \frac{(x+6)(x-2)}{x-3} \right| \\ &= \left| \frac{x+6}{x-3} \right| |x-2| \end{aligned}$$

Para acotar $\left| \frac{x+6}{x-3} \right|$, usamos $|x-2| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x-2 < \delta$:

Obtenemos la expresión del numerador sumando 8 a la desigualdad anterior, $-\delta + 8 < x + 6 < \delta + 8$, haciendo $\delta = 1$ (valor auxiliar para δ) tenemos $7 < x+6 < 9$.

Por otro lado:

De $-\delta < x-2 < \delta$ restando 1 tenemos $-\delta - 1 < x-3 < \delta - 1$, tomando $\delta = \frac{1}{2}$ (valor auxiliar para δ) la desigualdad anterior es $-\frac{3}{2} < x-3 < -\frac{1}{2}$, que multiplicando por -1 resulta $\frac{3}{2} > 3-x > \frac{1}{2}$, luego teniendo en cuenta que

$|3-x| = |x-3|$ se puede escribir $2 > \frac{1}{|x-3|} > \frac{2}{3}$. Por lo tanto

$$\left| \frac{x+6}{x-3} \right| = |x+6| \frac{1}{|x-3|} < 9,2 = 18.$$

$$< 18|x-2|$$

$$< 18\delta$$

$$\leq \varepsilon \quad \text{siempre que } 0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{18}.$$

Para que todos los pasos anteriores sean válidos el δ a tomar debe ser por lo tanto menor o igual que el menor entre los valores 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{\varepsilon}{18}$, es decir: $0 < \delta \leq \min \{1, \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{18}\}$.

Para $\varepsilon = 0,01$ se debe tener $0 < \delta \leq 0,05 \times 10^{-3}$.



4.4 Probar que $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

Se hace la observación de que $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no está definida en $x = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ queremos encontrar $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$:

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta = \varepsilon, \quad \text{por lo tanto } 0 < \delta \leq \varepsilon. \quad \text{Recuerde que } \left| \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq 1.$$



4.5 Probar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Recordemos la definición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) > 0 \quad \text{tal que si } n > N \text{ entonces } |a_n - L| < \varepsilon,$$

queremos demostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ si $n > N$:

$$|a_n - L| = |a_n - 0| = |a_n| = \left| \frac{1}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2} < \varepsilon \quad \text{siempre que } n > N \quad \text{y } N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$



Cálculo de límites

Por cálculo de límites se entiende la determinación del posible valor del límite. En los ejercicios 4.1 al 4.5 se dio el valor del límite y se probó que efectivamente con ese valor dado se cumple la definición.

Para calcular límites la primera inspección debe ser sustituir el valor al cual tiende la variable, digamos x_0 , y podemos encontrarnos con alguno de los siguientes casos:

- La sustitución da un número, es decir $f(x_0) = L$, entonces diremos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.
- Cuando se detecta que los valores de la función crecen sin cota superior o decrecen sin cota inferior, entonces decimos que el límite es $\pm\infty$, según sea el caso, es decir: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$.
- Expresiones indeterminadas, descritas en 4.16. Veremos cómo abordar las situaciones de cálculo más corrientes para resolver las indeterminaciones. **Es conveniente, además, observar que el origen de éstas no obedece a ningún fin pedagógico de hacer el cálculo más laborioso, sino porque las aplicaciones geométricas y físicas siempre conducen necesariamente a ellas.**

4.6 Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$.

Observe que si sustituimos directamente $x = 1$ obtenemos una indeterminación de la forma $0/0$; y el valor sustituido es una raíz tanto del numerador como del denominador, lo cual nos indica que ambos son divisibles por $x - 1$, realizando las divisiones correspondientes obtenemos:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \quad \text{y} \quad x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x^2 + 2)(x-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 + 2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2 + 2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x^2 + 2)} = \frac{2}{3}.$$



4.7 Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$.

Se presenta una indeterminación de la forma $0/0$; se debe multiplicar el numerador por una expresión (conjugada) de forma que el resultado sea $1 - x$; y hacer otro tanto con el denominador. Para obtener esa expresión simplemente se divide $1 - x$ entre $1 - \sqrt{x}$, tendremos: $\frac{-x+1}{-\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1$. Se hace lo mismo con el denominador:

$$\frac{x-1}{-\sqrt[3]{x}+1} = -x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 1.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})(-x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 1)}{(1 - \sqrt[3]{x})(-x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 1)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \left(-x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 1 \right)}{(x-1)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{- \left(-x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 1 \right)}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}.$$

Otra forma:

Se hace el cambio de variable $x = y^6$, luego cuando $x \rightarrow 1$ se tiene que $y \rightarrow 1$. Así

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - y^3}{1 - y^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-y)(y^2+y+1)}{(1-y)(1+y)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y^2+y+1}{1+y} = \frac{3}{2}.$$



4.8 Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1}$.

Indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Tanto el numerador como el denominador son polinomios de 2º grado en $\operatorname{sen} x$ que se anulan para $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, por lo tanto, dichos polinomios son divisibles por el término $\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}$:

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}} = 2 \operatorname{sen} x + 2, \text{ de donde } 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = (2 \operatorname{sen} x + 2)(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}).$$

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}} = 2 \operatorname{sen} x - 2, \text{ de donde } 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = (2 \operatorname{sen} x - 2)(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}).$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2})(2 \operatorname{sen} x + 2)}{(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2})(2 \operatorname{sen} x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2 \operatorname{sen} x + 2)}{(2 \operatorname{sen} x - 2)} = -3$$



4.9 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{2-x} - \sqrt{x}}{x-1}$.

Se puede resolver transformándolo en límites parecidos al del ejercicio 4.7 sumando y restando 1 en el numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{2-x} - \sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{2-x} - 1 + 1 - \sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{2-x} - 1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x-1} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{10};$$

en efecto, veamos la resolución de cada uno de ellos por separado:

Para encontrar la solución del primer límite de la suma, hagamos el **cambio de variable**, (éste es un recurso usado para transformar el límite original en otro más fácil de resolver, o bien, como en este caso para hacerlo similar a otro) $y = 2 - x$, de donde $x - 1 = 1 - y$, además $y \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow 1$; reescribimos el límite en esta nueva variable:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{2-x} - 1}{x-1} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{y} - 1}{1-y} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[5]{y} - 1)(y^{4/5} + y^{3/5} + y^{2/5} + y^{1/5} + 1)}{(1-y)(y^{4/5} + y^{3/5} + y^{2/5} + y^{1/5} + 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{(1-y)(y^{4/5} + y^{3/5} + y^{2/5} + y^{1/5} + 1)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{-1}{(y^{4/5} + y^{3/5} + y^{2/5} + y^{1/5} + 1)} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Notas: a) Para buscar la conjugada anterior dividida $y - 1$ por $\sqrt[5]{y} - 1$.

b) También se podría transformar el límite anterior en un cociente de polinomios con potencias naturales, haciendo el cambio $y^5 = 2 - x$. Hágalo.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(x-1)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(x-1)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(1 + \sqrt{x})} = -\frac{1}{2}.$$



Límites laterales

4.10 Dada $f(x) = \frac{|x-a|}{x-a}$, estudiar $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

La función f está definida a trozos, en efecto:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > a \\ -1 & \text{si } x < a \end{cases},$$

a la izquierda y a la derecha de a está definida de forma diferente, por lo tanto se debe estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} 1 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (-1) = -1.$$

Los límites laterales son distintos por lo tanto $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe.



4.11 Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \ln x & \text{si } 3 < x \end{cases}$, calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Observe que la función está definida en forma diferente a la izquierda y a la derecha de los puntos $x = 0$ y $x = 3$, por lo tanto, se deben estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 \quad \text{luego} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

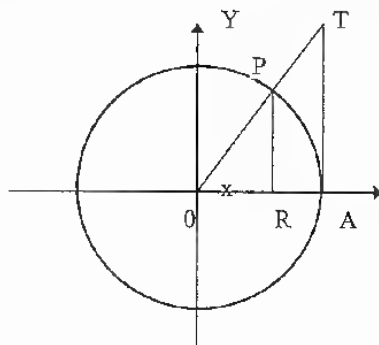
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln x = \ln 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+1) = 4 \quad \text{luego} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ no existe.}$$



Ejercicios que involucran el límite notable $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4.12 Probar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Consideremos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y designemos el ángulo $\angle AOP$ por x , con $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



Observemos que $\overline{PR} \leq \widehat{AP} \leq \overline{AT}$ donde $\overline{PR} = \sin x$, $\widehat{AP} = x$, $\overline{AT} = \tan x$; o sea que se tiene $\sin x \leq x \leq \tan x$, de donde dividiendo por $\sin x$, que es positivo, tenemos:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}, \text{ o bien } 1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x.$$

Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $-x$ es positivo y se cumple $1 \geq \frac{\sin(-x)}{-x} \geq \cos(-x)$, por ser $\sin x$ y $\cos x$ funciones par e impar respectivamente obtenemos la misma desigualdad

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x.$$

Por otro lado $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, luego el teorema del sandwich (4.8) garantiza que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Veamos para terminar, usando la definición, que efectivamente $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$:

Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $|\cos x - 1| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} |\cos x - 1| &= \left| \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\cos x + 1} \right| = \frac{|\sin x|^2}{|\cos x + 1|} \\ &\leq |x|^2, \quad \text{si } \delta \leq 1 \text{ se tiene } \frac{1}{2} < \frac{1}{|\cos x + 1|} < 1 \\ &< \varepsilon, \quad \text{siempre que } 0 < \delta < \min \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}, 1 \right\}. \end{aligned}$$



4.13 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 2 \cdot 1 = 2.$$



4.14 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$. Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ usaremos el límite notable $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$, se usó aquí el hecho de que el límite de un producto es el producto de los límites.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0 + 0 = 0$, ya que el límite de una suma es la suma de los límites.



4.15 Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{\sqrt[3]{x}-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sin(x-1)}{\sqrt[3]{x}-1} \cdot \frac{1}{\cos(x-1)} \right] \quad \text{que es el límite de un producto, calculemos entonces cada uno}$$

de ellos por separado.

Para calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt[3]{x}-1}$ se usará un cambio de variable con el fin de hacer aparecer el límite,

notable $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

Si $z = x - 1$ entonces $z \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 1$, por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\sqrt[3]{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\frac{2}{3}} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\frac{2}{3}} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 0 \cdot 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos(x-1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} \cos(x-1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Por último $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sin(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}} \cdot \frac{1}{\cos(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos x} = 0 \cdot 1 = 0.$



4.16 Discutir la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$.

Veamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1, \text{ por lo tanto}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} \text{ no existe.}$$



4.17 Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(x - \frac{\pi}{3})}$.

Se presenta una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Se hace el cambio de variable $z = x - \frac{\pi}{3}$; con este cambio, tenemos que si x tiende a $\frac{\pi}{3}$ entonces z tiende a cero, ($x \rightarrow \frac{\pi}{3} \Rightarrow z \rightarrow 0$) y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(x - \frac{\pi}{3})} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos(z + \frac{\pi}{3})}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z + \sqrt{3} \sin z}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos z}{\sin z} + \sqrt{3} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z} + \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos z)(1 + \cos z)}{\sin z (1 + \cos z)} = \sqrt{3} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 z}{(1 + \cos z) \sin z} = \sqrt{3} + 0 = \sqrt{3} \end{aligned}$$



4.18 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \cdot 0 = 0.$$



4.19 Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

Se pasa a un límite equivalente en variable $z = x - \frac{\pi}{4}$; luego z tiende a cero cuando x tiende a $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(z + \frac{\pi}{4}) - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4})}{1 - \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} z}{z(1 - \operatorname{tg} z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} z}{z \cos z(1 - \operatorname{tg} z)} \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\cos z(1 - \operatorname{tg} z)} = 2 \cdot 1 = 2.\end{aligned}$$

✓

4.20 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right)$

Tenemos que $\left|\operatorname{sen} \frac{2}{x}\right| \leq 1$, función acotada, y $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} 3x = 0$, luego $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right) = 0$.

✓

Calculo de límites en el infinito

4.21 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 1}{x^5 + 1}$.

Tanto el numerador como el denominador tienen límites infinitos (indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$).
Dividiendo entre x^4 se evita la situación anterior:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 1}{x^5 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^4}}{x + \frac{1}{x^4}} = 0.$$

✓

4.22 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$.

Si aplicamos el teorema de suma algebraica de límites tendremos $+\infty - \infty$, que también es una indeterminación; haciendo algunas operaciones algebraicas se evita esta situación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1) - x}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} = 0.$$

✓

4.23 Probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} x$ no existe.

Se usará el teorema 4.14. Consideremos las siguientes sucesiones $x_k = k\pi$ y $a_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ambas tienden a infinito cuando k tiende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} x = \lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{tg}(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{tg}(k\pi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} x = \lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{tg}(a_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

El límite no existe ya que de existir tendría el mismo valor a través de cualquier sucesión que tienda a infinito.

✓

4.24 Calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n^3 - n + 2}{n^2 + 1}$.

Se divide numerador y denominador por n^2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n^3 - n + 2}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(9n - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = +\infty.$$



4.25 Calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Se sabe que $-1 \leq \sin n \leq 1$ para cualquier n , luego $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, por lo tanto, por el teorema del sandwich (4.8) se tiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.



4.26 Calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a}$, $a > 0$

Recordar que $a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln a}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln a} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln a} = e^0 = 1$.

*. la función exponencial es continua en $x = 0$:



4.27 Probar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ no existe.

Haciendo $n = 2k$ se tiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^{2k} = 1$ y haciendo $n = 2k+1$ $\lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^{2k+1} = -1$. Se obtuvieron límites distintos, lo cual es una contradicción puesto que el límite de existir es único.



Ejercicios que involucran el límite notable $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

4.28 Probar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existe.

La prueba consiste en usar el teorema (4.12), por lo tanto se debe demostrar que la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada superiormente.

Usando el binomio de Newton, escribimos el desarrollo de los términos a_n y a_{n+1} de la sucesión:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n-1} \frac{1}{n^{n-1}} + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{(n+1)-2}{n+1}\right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{(n+1)-1}{n+1}\right),$$

donde en cada desarrollo los términos son positivos.

Hacemos una comparación término a término entre los dos desarrollos, por ejemplo entre los terceros términos tenemos que

$$\frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

lo cual ocurre también con los otros y además a_{n+1} tiene un término más que a_n y positivo. Por lo tanto, $a_{n+1} > a_n$, es decir, la sucesión es creciente.

Probamos ahora que es acotada:

En el desarrollo de a_n , todas las expresiones de la forma $\left(1 - \frac{k}{n}\right) < 1$ para cualquier $k < n$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) < 3 \end{aligned}$$

y a su vez se puede observar que $a_n > 2$; los términos de la sucesión están acotados entre dos y tres

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Tenemos entonces una sucesión creciente y acotada superiormente, luego (teorema 4.12) existe un número que se

$$\text{denota por } e \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$



4.29 Probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Usaremos el teorema del Sandwich:

Dado un número real x cualquiera, siempre existe un natural tal que $n < x \leq n+1$, de donde $\frac{1}{n} > \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$ y también

$$1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{n+1}, \text{ por ser la función exponencial creciente se tiene: } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Por otro lado,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

y
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e,$$

luego
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$



4.30 Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Hacemos el cambio $z = -(x+1)$, de donde $x = -(z+1)$; luego

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-(z+1)}\right)^{-z-1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^{-z-1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z+1}{z}\right)^{z+1} \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$



4.31 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$.

Se convierte en el límite notable con el cambio $z = \frac{1}{x}$ y entonces $z \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y $z \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^-$. Así tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{1/x} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e,$$

por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$.



4.32 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right) = \ln e = 1.$$

*, -El logaritmo es una función continua en $x=e$.



4.33 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, $a > 0$.

Se hace el cambio $z = \frac{a}{x}$, y entonces $z \rightarrow 0^+$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{z \rightarrow 0^+} \left(1 + z\right)^{1/z} = \left(\lim_{z \rightarrow 0^+} (1+z)^{1/z} \right)^a = e^a. \quad * \text{ La función } x^a \text{ es continua en } x=e.$$



4.34 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1 \cdot 1 = 1, \quad \text{puesto que con el cambio}$$

$z = 2x$ se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Este último está propuesto como el ejercicio 15.3.



4.35 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^{x+2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3-6}{x+3} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{6}{x+3} \right)^{x+2}, \text{ con el cambio de variable } x = -6y-3 \text{ el}$$

límite anterior es equivalente a

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{-6y-1} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{-6y} \cdot \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{-1} = \left[\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^{-6} \cdot \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{-1} = e^{-6} \cdot 1 = e^{-6}.$$



Límites infinitos

4.36 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$.

Se puede observar que cuando la variable x se acerca a cero, tanto por la derecha como por la izquierda, la función toma valores muy grandes y positivos, luego $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.



4.37 Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$.

Se observa que $x-1 > 0$ si $x > 1$ y $x-1 < 0$ si $x < 1$, por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.



4.38 Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x$.

Si aplicamos el teorema del producto, obtenemos la indeterminación $0 \cdot \infty$ ya que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \pm \infty$ dependiendo de si x tiende a $\frac{\pi}{2}$ por la derecha o por la izquierda. Transformemos el límite en otro mediante un cambio de variable: $z = x - \frac{\pi}{2}$ entonces $z \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ y

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\operatorname{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\cos z}{-\operatorname{sen} z} = - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = -1 \cdot 1 = -1.$$



4.39 Estudiar $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}}$.

La función no está definida en $x=1$, por lo cual se debe estudiar sus límites laterales en dicho punto: Hacemos el cambio $z = \frac{1}{x-1}$, entonces $z \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 1^+$ y $z \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 1^-$ así

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{z \rightarrow +\infty} e^z = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0, \text{ por lo tanto el límite no existe.}$$



Ejercicios de Continuidad

Recordar que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall x \in D) \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

4.40 Demostrar que la función constante $f(x) = c$, es continua.

Sea x_0 cualquier punto de su dominio, que como se sabe es \mathbb{R} ,
 $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Podemos, por lo tanto, escoger como δ cualquier número positivo.



4.41 Demostrar que la función $f(x) = \text{Sen } x$ es continua.

Sea x_0 cualquier punto de su dominio, que como se sabe es \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{(x - x_0)}{2} \cos \frac{(x + x_0)}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{(x - x_0)}{2} \right| \left| \cos \frac{(x + x_0)}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{(x - x_0)}{2} \right| \leq |x - x_0| < \delta \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

luego δ puede ser cualquier número positivo menor que ε .



4.42 Demostrar que la función potencia, $f(x) = x^n$, es continua.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^n - x_0^n| = |(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1})(x - x_0)| \\ &\leq (|x|^{n-1} + |x_0| |x|^{n-2} + \dots + |x_0|^{n-2} |x| + |x_0|^{n-1}) |x - x_0| \\ &\quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x| < \delta + |x_0|, \text{ eligiendo } \delta = 1 \text{ tenemos} \\ &\quad |x| < 1 + |x_0|. \\ &\leq ((1 + |x_0|)^{n-1} + |x_0|(1 + |x_0|)^{n-2} + \dots + |x_0|^{n-2}(1 + |x_0|) + |x_0|^{n-1}) |x - x_0| \\ &\leq nM |x - x_0| \quad \text{donde } M = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{ |x_0|^k (1 + |x_0|)^{n-1-k} \} \\ &< nM\delta \\ &\leq \varepsilon \quad \text{siempre que } 0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{nM}. \end{aligned}$$

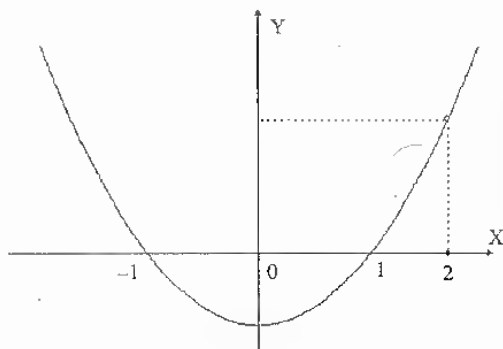
El δ que queríamos encontrar es $0 < \delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{nM}\}$.



4.43 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

Para **estudiar la continuidad** de una función dada se debe tener en cuenta su gráfico, si es posible trazarlo, y la idea geométrica de continuidad: el gráfico no debe presentar "saltos"

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



En este caso es fácil trazar el gráfico de la función. Podemos observar que éste presenta una interrupción en $x_0=2$:

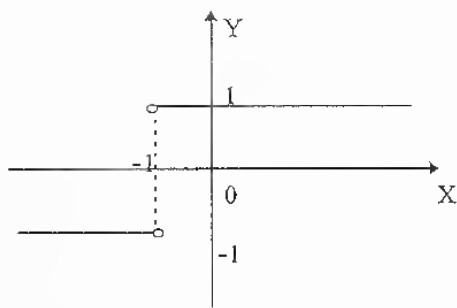
$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, y $f(2)=0$, es decir, que se cumple la condición 1., pero no la condición 2.. En $x=2$ hay una discontinuidad evitable.

Si $x_0 \neq 2$ se tendrá que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, es decir: f es continua en cada punto distinto de 2. A partir de f se puede definir una función continua, ésta es:

$$F(x) = x^2 - 1.$$



$$b) f(x) = \frac{x+1}{|x+1|}$$



Observe que f presenta un salto en $x_0 = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1) = 1,$$

luego no existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, por lo tanto, f es discontinua en $x_0 = -1$ y la discontinuidad es no evitable.

A la izquierda y a la derecha de -1 la función es constante, que como fue demostrado en el ejercicio 4.40 es continua.



$$c) g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -\pi \\ \cos x & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ 1-x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Los posibles puntos de discontinuidad son $x = -\pi$ y $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \cos x = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\pi^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} 1 = 1, \quad \text{por lo tanto, la función presenta una}$$

discontinuidad no evitable en $x = -\pi$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x^2) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1$ y $g(0)=3$, por lo tanto, la función es discontinua en $x = 0$; pero la discontinuidad es evitable. A partir de esta función, podemos definir una función continua en $x = 0$:

$$G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -\pi \\ \cos x & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 1-x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Discontinua
en $x = -\pi$



4.44 Determinar a y b de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} -2 \operatorname{sen} x & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

sea continua en \mathbb{R}

Los puntos donde la función f presenta posibles problemas de continuidad para algunos valores de a y b son: $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

Calcularemos en estos puntos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (a \operatorname{sen} x + b) = -a + b \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} (-2 \operatorname{sen} x) = 2.$$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$ debe ocurrir que los límites laterales sean iguales: $-a + b = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (a \operatorname{sen} x + b) = a + b \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0.$$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ debe ocurrir que los límites laterales sean iguales: $a + b = 0$. Por lo tanto f será continua

en $\pm \frac{\pi}{2}$ para las soluciones del sistema $\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 2 \end{cases}$ que son $a = -1$ y $b = 1$.



4.45 Definir una función continua en \mathbb{R} excepto en el punto $x = 2$, donde $f(2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

Una de las posibilidades es dar una función f que sea un cociente donde el denominador se anule en $x = 2$, que sea positiva a la derecha de 2 y negativa a la izquierda:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}.$$



Ejercicios sobre el teorema de los valores intermedios y el método de bisección.

4.46 En cada caso indique si el teorema del valor intermedio se puede aplicar y explique el porqué.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $[0, 1]$ y $c = 1$.

La función es un polinomio, por lo tanto, es continua en \mathbb{R} y por ende lo es en el intervalo $[0, 1]$. $f(0) = 2$ y $f(1) = -1$ y $c = 1$ es un valor comprendido entre ellos, luego es aplicable el teorema; por lo tanto, la ecuación $f(x) = 1$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, 1]$:

$x = \frac{4 - \sqrt{12}}{2}$ satisface la ecuación $x^2 - 4x + 2 = 1$ y está en el intervalo indicado.



$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ -x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \quad [-3, 1] \quad \text{y} \quad c = -\frac{3}{2}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x - 2) = -2$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1) = 1$, por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe y f no es continua en $x = 0$. No se satisface una de las hipótesis del teorema, por lo cual éste no es aplicable en el intervalo $[-3, 1]$.

4.47 Demostrar que un polinomio de grado impar tiene, al menos, una raíz real. ✓

 Sea $P(x) = a_1 x^{2n+1} + a_2 x^{2n} + \dots + a_{2n} x + a_{2n+1}$ que es un polinomio arbitrario de grado impar. Como función P es continua en \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{si } a_1 < 0 \end{cases}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_1 > 0 \\ +\infty & \text{si } a_1 < 0 \end{cases}$; por lo tanto, en todos los casos se puede afirmar que existe, al menos, un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P(x_0) = 0$.

✓

4.48 Probar que la ecuación $x = \cos x$ tiene una solución en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y calcularla con un error menor que 0.01.

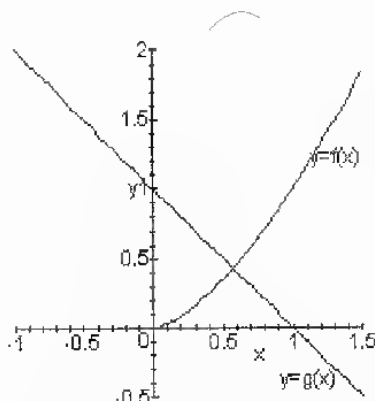
 La función asociada con la ecuación es $F(x) = x - \cos x$, la cual es continua en \mathbb{R} y, en particular, en el intervalo dado. $F(0) \cdot F(\frac{\pi}{2}) = -1 \cdot \frac{\pi}{2} < 0$; por lo tanto existe $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $F(x_0) = 0$. La calculamos por el método de bisección:

It.	a	b	F(a)	F(b)	F(a).F(b)	$x_0 = \frac{a+b}{2}$	$ b-a $
0	0	$\frac{\pi}{2}$	-1	$\frac{\pi}{2}$	-	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
1	0	$\frac{\pi}{4}$	-1	0.078291382	-	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
2	0	$\frac{\pi}{8}$	-1	-0.531180451	+	-----	-----
2	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	-0.531180451	0.078291382	-	$\frac{3\pi}{16}$	0.392699082
3	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$	-0.24242099	0.078291382	-	$\frac{7\pi}{32}$	0.0196349541
4	$\frac{7\pi}{32}$	$\frac{\pi}{4}$	-0.08578706	0.078291382	-	$\frac{15\pi}{64}$	0.09817477
5	$\frac{15\pi}{64}$	$\frac{\pi}{4}$	-0.004640347	0.078291382	-	$\frac{31\pi}{128}$	0.049087385
6	$\frac{31\pi}{128}$	$\frac{\pi}{4}$	0.036607388	0.078291382	+	-----	-----
6	$\frac{15\pi}{64}$	$\frac{31\pi}{128}$	-0.004640347	0.036607388	-	$\frac{61\pi}{256}$	-----
7	$\frac{61\pi}{256}$	$\frac{31\pi}{128}$	0.015928353	0.036607388	+	-----	-----
7	$\frac{15\pi}{64}$	$\frac{61\pi}{256}$	-0.004640347	0.015928353	-	$\frac{121\pi}{512}$	0.012271846
8	$\frac{15\pi}{64}$	$\frac{121\pi}{512}$	-0.004640347	0.005630132	-	$\frac{241\pi}{1024}$	0.006135923

$$x_0 = \frac{241\pi}{1024} \quad \text{y} \quad F(x_0) = 0.0000491415.$$

✓

4.49 Establezca geométrica y analíticamente que la ecuación $\sqrt{x^3} = -x + 1$ tiene una solución y calcularla con dos cifras decimales exactas.



Geométricamente:

Sean $f(x) = \sqrt{x^3}$ y $g(x) = -x + 1$. Como se puede observar, las gráficas de las funciones se intersectan en un único punto; la abscisa de dicho punto es la solución de la ecuación.

Analíticamente:

La función $F(x) = \sqrt{x^3} + x - 1$ es continua en \mathbb{R} , por lo tanto, también lo es en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. $F\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,146$ y $F(1) = 1$, luego

$F\left(\frac{1}{2}\right) \cdot F(1) < 0$, por lo cual F tiene un cero en dicho intervalo.

Cálculo del valor aproximado de la raíz por el método de bisección:

Si el valor aproximado para la raíz ha de tener dos cifras decimales exactas, es suficiente dar como raíz el punto medio de un intervalo con longitud menor que 0,01:

It.	a	b	F(a)	F(b)	F(a)·F(b)	$x_0 = \frac{a+b}{2}$	$ b-a $
0	0.5	1	-0.1464466	1	-	$\frac{3}{4}$	0.5
1	0.5	$\frac{3}{4}$	-0.1464466	0.399519	-	$\frac{5}{8}$	0.25
2	0.5	$\frac{5}{8}$	-0.1464466	0.1191059	-	$\frac{9}{16}$	0,125
3	0.5	$\frac{9}{16}$	"	-0.015625	+	-----	-----
3	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	-0.015625	0.1191059	-	$\frac{19}{32}$	0.0625
4	$\frac{9}{16}$	$\frac{19}{32}$	-0.015625	0.0512651	-	$\frac{37}{64}$	0.03125
5	$\frac{9}{16}$	$\frac{37}{64}$	-0.015625	0.0176996	-	$\frac{73}{128}$	0.015625

$$x_0 = \frac{73}{128} \text{ y } F(x_0) = 0.001007$$



EJERCICIOS PARA SER RESUELTOS POR EL ESTUDIANTE

1.- En cada uno de los siguientes ejercicios encontrar un δ tal que si

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

1.1- $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)$, $x_0 = 4$, $L = \frac{3}{2}$, $\varepsilon = 0,01$

1.2- $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x_0 = 0$, $L = 0$, $\varepsilon = 0,005$

1.3- $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x_0 = 0$, $L = 0$, $\varepsilon = 0,5$

1.4- $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$, $L = 0$, $\varepsilon = 0,1$

1.5- $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $L = -1$, $\varepsilon = 0,25$

2.- ¿ Por qué los valores de ε que tomamos en el ejercicio anterior son todos "pequeños"? ¿ Es que no pueden ser grandes?

Estudie, usando la definición, qué ocurre con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ siendo $f(x) = c$.

3.- Encontrar el posible valor de los siguientes límites y demostrar que sus conjeturas son correctas:

3.1.- $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 1)$

3.2 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 1)$

3.3.- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \sin \frac{1}{x-1}$

3.4.- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-1}$

3.5.- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2 - 1}$

3.6.- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \neq 4 \\ 2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

4.- Construya el gráfico de $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -1 \\ x^3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$. ¿Qué puede decir de $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$?

5.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 3 \\ x+1 & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ 6 & \text{si } x > 5 \end{cases}$, decidir la existencia de $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ y de $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.

6.-

6.1) Demuestre que la existencia de $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, no implica la existencia de los límites $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

6.2) Demuestre que la existencia de $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$, no implica la existencia de los límites $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

7.- Calcular los siguientes límites:

7.1.- $\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + x)$

7.2.- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x}{5x + 1}$

7.3.- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

7.4.- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - 4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{3}}$

7.5.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 5x^2 + x}{x^2 - 2x}$

7.6.- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{2x^3 - 3x + 1}$

7.7.- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$

7.8.- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2} \sqrt[3]{x+1}}{(x-1)^2}$

7.9.- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

7.10.- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x + \cos x - 1}{4 \cos^2 x + 4 \cos x - 3}$

7.11.- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{x+24}}{x-3}$

8.- Utilice el teorema del Sandwich y, de ser necesario, alguna de las desigualdades dadas para calcular los siguientes límites:

a) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

b) $\operatorname{sen} x \leq \operatorname{arcsen} x \leq x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}$

8.1.- $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \quad n > 2$

8.2.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

8.3.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

9.- Usando el límite notable $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, calcular los siguientes límites:

$$9.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin x}$$

$$9.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$9.3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$$

$$9.4. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$$

$$9.5. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$9.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$9.7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$$

$$9.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$9.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$$

$$9.10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi \sec x - 2x \operatorname{tg} x)$$

$$9.11. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$9.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$$

10.- Pruebe que si f es una función acotada en un intervalo que contenga a z y si $\lim_{x \rightarrow z} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow z} g(x)f(x) = 0$.

11.- Calcular los siguientes límites:

$$11.1. \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$$

$$11.2. \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}$$

$$11.3. \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} \operatorname{tg} \left(\frac{e^x - e}{x^2 - 1} \right)$$

$$11.4. \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\pi - x} \cos \left(\operatorname{Ln} \frac{x - \pi}{x} \right)$$

$$11.5. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$$

12.- Dar la definición e interpretación geométrica de:

$$12.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

$$12.2. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$12.3. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$12.4. \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

13.- Demostrar que:

$$13.1. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$$

$$13.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x^2} \right) = 3$$

$$13.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$$

$$13.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n^2} = 0$$

14.- Probar que $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$ no existen si f es una función periódica no constante.

15.- Usando el límite notable $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$, calcular los siguientes límites:

$$15.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

$$15.2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}}$$

$$15.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$15.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

$$15.5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_2 x - \log_2 a}{x - a}$$

$$15.6. \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

$$15.7-. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^{x+3}$$

$$15.8-. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n^2}{4n^2-1} \right)^{n^2}$$

$$15.9-. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x}$$

$$15.10-. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x} - e^2}{x-1}$$

$$15.11-. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{Ln}(\operatorname{tg} x)}{1 - \cot g x}$$

$$15.12-. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{3x^2+1} \right)^{x^2}$$

16.- Calcular los siguientes límites:

$$16.1-. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x - 4)$$

$$16.2-. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x}$$

$$16.3-. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{e^x}$$

$$16.4-. \lim_{x \rightarrow 0} 5^{\frac{1}{x}}$$

$$16.5-. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{3x^3 - 2x^2 + x + 3}$$

$$16.6-. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 3n + 5}{1 - n^2}$$

$$16.7-. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1} \right)$$

$$16.8-. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3-x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$16.9-. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x}$$

$$16.10-. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1-x}}{x}$$

$$16.11-. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{-x}}$$

$$16.12-. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{tgh}(x^3-1)}{x^2}$$

$$16.13-. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x^2 - x^4} - x^2}{x}$$

$$16.14-. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(a^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \quad a > 0.$$

$$16.15-. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{|x|}$$

$$16.16-. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$16.17-. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2 - e^{\frac{4}{3-x}}}$$

$$16.18-. \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x(\operatorname{Ln}(x+a) - \operatorname{Ln} x) \quad a > 0.$$

Problemas sobre continuidad de funciones

17.- Probar que las siguientes funciones son continuas en su dominio:

$$17.1-. f(x) = \cos x$$

$$17.2-. f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$17.3-. f(x) = \operatorname{Log} x$$

18.- Dadas las siguientes funciones:

a) Construya su gráfico.

b) Determine los intervalos de continuidad y los puntos de discontinuidad.

$$18.1 \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$18.2-. g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3 - 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ \sqrt[3]{-25-x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

19.- Clasificar las discontinuidades en evitables y no evitables. De ser posible, construya a partir de f una función continua:

$$19.1.- f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$19.2.- f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}+1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$19.3.- f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x-1) & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \operatorname{Ln}(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$19.4.- f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$19.5 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-3^{\operatorname{Ln}|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

20.-Para cada una de las funciones dadas determine a y b para que sean continuas en \mathbb{R} :

$$20.1.- f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ ax + b & \text{si } |x| < 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$20.2.- f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ bx^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

21.-Definir una función continua en \mathbb{R} , excepto en los puntos:

$$21.1.- x=3, \text{ donde } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3).$$

$$21.2.- x=1, \text{ donde } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 \text{ y } f(1)=3.$$

Teorema de los valores intermedios. Método de bisección.

22.- Explique en cada caso si es aplicable el teorema de los valores intermedios para justificar la existencia de solución de la ecuación planteada en el intervalo indicado:

$$22.1.- f(x) = x^3 + x + 1, \quad \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \quad f(x_0) = 0.$$

$$22.2.- f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \quad [0, 2], \quad f(x_0) = 0.$$

$$22.3.- f(x) = \operatorname{Ln} x + x, \quad [1, 2], \quad f(x_0) = 3.$$

23.-Para cada una de las siguientes ecuaciones:

$$23.1.- 3^x = -x^2 + 2$$

$$23.2.- \operatorname{sech}(2x - 1) = 0.5$$

a) Establezca geoméricamente cuantas soluciones tiene.

b) Justifique lo anterior analíticamente.

c) Calcule las raíces con dos cifras decimales exactas, usando el método de bisección.

24.-Para cada una de las siguientes ecuaciones, pruebe que tiene solución en el intervalo indicado y calcúlala con dos cifras decimales exactas:

$$24.1.- x^3 - 3x + 1 = 0 \quad [0, 1]$$

$$24.2.- \operatorname{Ln} x = -x \quad [0.5, 1]$$

$$24.3.- \operatorname{tg} x = x \quad \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$24.4.- e^x = x + 3 \quad [-3, -2]$$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS IMPARES

3.1	8	3.3	0	3.5	$\frac{8}{3}$	5	$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ no existe	$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 6$
7.1	$a^2 + a$	7.3	4	7.5	$-\frac{1}{2}$	7.7	$\frac{5}{3}$	
7.9	$-\sqrt{2}$ ✓	7.11	$\frac{7}{54}$	8.1	0	8.3	0	

9.1	3	9.3	$-\operatorname{sen} x_0$	9.5	$\cos x$	9.7	π
9.9	1	9.11	$\frac{2}{\pi}$	11.1	0	11.3	0
11.5	0	15.1	e^2	15.3	1	15.5	$\frac{1}{a \operatorname{Ln} 2}$
15.7	e^{-5}	15.9	0	15.11	1	16.1	$-\infty$
16.3	$+\infty$	16.5	$\frac{2}{3}$	16.7	0	16.9	0
16.11	$-\infty$	16.13	$\sqrt{5}$ por la derecha, $-\sqrt{5}$ por la izquierda				
16.15	1 por la derecha, -1 por la izquierda.			16.17	$\frac{3}{2}$ por la derecha, 0 por la izquierda.		
19.1	Evitable, $F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$			19.3	Es continua en $x = 1$. En $x = 2$ hay una		
discontinuidad no evitable.		19.5	Evitable. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - 3^{\operatorname{Ln} x }} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$				
21.1.	$a=2, b=0$	23.1 a)	dos soluciones, c) -1.32 y 0.506				
24.3	4.492	24.1	0.348				

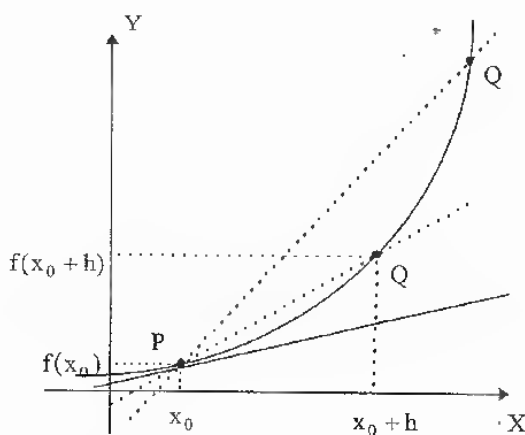
5 DERIVADAS

5.1 Pendiente de la recta tangente (Interpretación geométrica de la derivada)

Supongamos que deseamos encontrar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$:

La pendiente de la recta secante al gráfico de f en los puntos $P(x_0, f(x_0))$ y $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ es la razón

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Si h tiende a cero ($h \rightarrow 0$), geoméricamente podemos observar que el punto Q (móvil) se acerca al punto P (fijo) y la recta secante tiende a la recta tangente. Con base en esta idea geométrica, la pendiente de la tangente de $y = f(x)$ en el punto P se obtendrá como el valor límite del cociente (razón) anterior, cuando h tienda a cero, es decir:

$$m_{\text{tag}} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

5.2 Definición

Si este límite existe y es finito recibe el nombre especial de **derivada de f en x_0** . Se denota por:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y se dirá que f es derivable en x_0 . Con el cambio $x = x_0 + h$ tenemos:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En forma similar se define la **función derivada de f (derivada primera de f)**:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

El conjunto de números $x \in D(f)$ para los cuales existe el límite anterior es el dominio de f' .

Observe la diferencia entre $f'(x_0)$ que es un número, repetimos, la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ y $f'(x)$ que es una función.

Si usamos la notación familiar de $y = f(x)$ para indicar que y es la variable dependiente y x la independiente entonces otras notaciones para la derivada son comunes:

$$y' = f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{dy}{dx}(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_x = \left. \frac{dy}{dx} \right|_x$$

Las notaciones $\frac{df}{dx}$ o $\frac{dy}{dx}$ fueron introducidas por Leibniz.

5.3 Ecuación de la recta tangente

Podemos, ahora, dar la ecuación de la recta tangente en términos de la derivada:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

5.4 Interpretación física de la derivada

Si $f(t)$ representa la posición instantánea de una partícula *que se mueve en línea recta*, entonces la *velocidad media* en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ viene dada por

$$v_m = \frac{f(t+h) - f(t)}{(t+h) - t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

y la *velocidad instantánea* es el límite cuando el tiempo transcurrido tiende a cero ($h \rightarrow 0$),

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$$

5.5 Derivadas laterales

Las derivadas laterales se definen usando la misma idea de los límites laterales:

Derivada lateral derecha:

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivada lateral izquierda:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si estos límites existen y son finitos. Obviamente, si $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ entonces $f'(x_0)$ no existe.

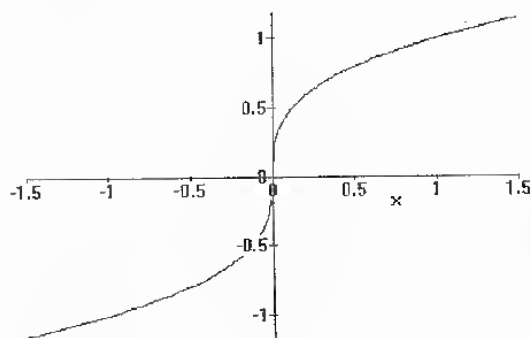
5.6 Teorema

Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0 .

El enunciado es equivalente a:

Si f no es continua en x_0 entonces f no es derivable en x_0 .

El recíproco de este teorema es falso. Es decir, una función puede ser continua en x_0 sin que sea derivable en x_0 :



$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, es continua en $x_0 = 0$ y $f'(0)$ no existe. Demuéstrelo.

¿Qué puede usted decir de la función $g(x) = |x|$ en el origen?

5.7 Álgebra de derivadas

Siempre que f y g sean funciones derivables en x tenemos:

Derivada de la suma

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Derivada del producto

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Derivada del cociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

En el caso de la derivada de un producto, si una de las funciones es constante se tiene:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

5.8 Regla de la cadena (Derivada de la función compuesta)

Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ ambas derivables en cada punto de su dominio, entonces también es derivable $y = f(g(x))$ y además

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Para aplicar la regla de la cadena, o sea, derivar una función compuesta, resulta eficiente descomponerla en dos partes a saber:

$$y = \underbrace{f}_{f_e}(\underbrace{g(x)}_{f_i}),$$

f_e : función externa y f_i : función interna. En esta terminología se tendrá:

$$(f(g(x)))' = \underbrace{f'(g(x))}_{(1)} \cdot \underbrace{g'(x)}_{(2)}$$

(1): Derivada de la función externa evaluada en $g(x)$.

(2): Derivada de la función interna.

También es común y fácil de recordar otra formulación alterna para la regla de la cadena (regla nemotécnica):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

5.9 Derivación implícita

La ecuación de una curva puede expresarse en forma explícita, $y = f(x)$, o bien en forma implícita, $F(x, y) = 0$; de ésta última, es posible, a veces, despejar y como función de x en forma única y otras resulta algebraicamente imposible.

Ejemplos:

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1) $x^2 \ln y - 1 = 0$ | se puede despejar y como función de x en forma única: $y = e^{1/x^2}$. |
| 2) $x^2 + y^2 = 5$ | se puede despejar, pero no en forma única: $y = \pm\sqrt{5-x^2}$ |
| 3) $x^4 + 3x^2y^3 - y^7 + 6 = 0$, | algebraicamente imposible. ¿Será que no se puede o simplemente el autor no sabe hacerlo? |

Sin embargo, si alrededor de un punto digamos (x_0, y_0) , se tiene $\frac{dF}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$ (para derivar se considera en la ecuación, x como constante) entonces *localmente* se puede tratar la curva como una función, es decir, alrededor del punto (x_0, y_0) se puede despejar a y como función de x . A pesar de que la teoría dice cuando es posible hacerlo, ésta no proporciona ningún método para realizarlo.

Afortunadamente, la derivada $\frac{dy}{dx}$ se obtiene sin necesidad de despejar, utilizando el método conocido como derivación implícita que consiste en derivar la ecuación teniendo en cuenta a x como variable e y como una función desconocida. Véanse los ejemplos resueltos.

5.10 Derivada de la función inversa

Si la función $y = f(x)$ admite inversa f^{-1} entonces

$$f(f^{-1}(u(x))) = u(x).$$

Derivando implícitamente se tiene $f'(f^{-1}(u(x))) \cdot (f^{-1}(u(x)))' = u'(x)$, de donde:

$$(f^{-1}(u(x)))' = \frac{u'}{f'(f^{-1}(u(x)))} \quad \text{si } f'(f^{-1}(u)) \neq 0.$$

5.11 Derivadas de orden superior

Si f' (primera derivada) es derivable, la derivada de esta función es la segunda derivada y se denota por f'' , si ésta a su vez es derivable, su derivada se llama tercera derivada y se denota por f''' , etc.

Primera derivada: y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{df}{dx}$
Segunda derivada: y''	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2f}{dx^2}$
Tercera derivada: y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3f}{dx^3}$
Cuarta derivada: $y^{(4)}$	$f^{(4)}$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4f}{dx^4}$
n-ésima derivada: $y^{(n)}$	$f^{(n)}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\frac{d^nf}{dx^n}$

5.12 Interpretación física de la segunda derivada

En su movimiento, los cuerpos sufren cambios en su velocidad, es decir: se aceleran. La aceleración es, pues, la razón de cambio de la velocidad respecto del tiempo. En este orden de ideas, si $y = f(t)$ describe la posición de un cuerpo en movimiento rectilíneo y considerando el intervalo de tiempo $[t, t+h]$, la **aceleración media** en ese intervalo de tiempo será:

$$a_M = \frac{f'(t+h) - f'(t)}{h},$$

y la **aceleración instantánea** se obtiene cuando el tiempo transcurrido tiende a cero ($h \rightarrow 0$):

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t+h) - f'(t)}{h}.$$

Es decir, la aceleración es la segunda derivada de la función posición: $a = f''(t)$.

5.13 Derivación Paramétrica

Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ las ecuaciones paramétricas que describen una curva. Supongamos que $\frac{dx}{dt}$ no se anula en el dominio de la función $x(t)$, entonces de $x = x(t)$ se puede despejar t como función de x , es decir, $t = t(x)$, y así escribir y como función de x :

$$y(x) = y(t(x))$$

Aplicando la regla de la cadena a esta composición se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \quad \text{con} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0,$$

por lo tanto

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

Con base en los mismos argumentos se deduce la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy/dt}{dx/dt} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}}$$

5.14 Tabla de derivadas

Si u es una función y c es constante entonces:

$$\times (c)' = 0$$

$$\times (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u', \quad n \text{ entero}$$

$$\times (\text{Sen } u)' = u' \text{Cos } u$$

$$\times (\text{Cos } u)' = -u' \text{Sen } u$$

$$\times (\text{Tg } u)' = u' \cdot \text{Sec}^2 u$$

$$\times (\text{ctg } u)' = -u' \cdot \text{Csc}^2 u$$

$$\times (\text{Sec } u)' = u' \text{Sec } u \text{ tg } u$$

$$\times (\text{csc } u)' = -u' \text{Csc } u \text{ Ctg } u$$

$$\times (u^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} u^{\frac{m}{n}-1} \cdot u'$$

$$\times (u^r)' = ru^{r-1} \cdot u'$$

$$\times (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$\times (\text{Lnu})' = \frac{u'}{u}$$

$$\checkmark (\text{Log}_a u)' = \frac{1}{u \text{Lna}} \cdot u' = \frac{\text{Log}_a e}{u} \cdot u'$$

$$\checkmark (a^u)' = a^u \text{Lna} \cdot u'$$

$$\checkmark (\text{arcsen } u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\checkmark (\text{arccos } u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\checkmark (\text{arctg } u)' = \frac{u'}{(1+u^2)}$$

$$\checkmark (\text{arcctg } u)' = -\frac{u'}{(1+u^2)}$$

$$\checkmark (\text{arcsec } u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$\checkmark (\text{arccsc } u)' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$\checkmark (\text{senh } u)' = u' \cosh u$$

$$\checkmark (\cosh u)' = u' \sinh u$$

$$\checkmark (\text{tgh } u)' = u' \text{sech}^2 u$$

$$\checkmark (\text{ctgh } u)' = -u' \text{csch}^2 u$$

$$\checkmark (\text{sech } u)' = -u' \text{sech } u \text{ tgh } u$$

$$\checkmark (\text{csch } u)' = -u' \text{csch } u \text{ ctgh } u$$

$$\checkmark (\sinh^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$\checkmark (\cosh^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$\checkmark (\text{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}, \quad |u| < 1$$

$$\checkmark (\text{ctgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}, \quad |u| > 1$$

$$\checkmark (\text{sech}^{-1} u)' = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$$

$$\checkmark (\text{cosech}^{-1} u)' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$$

La deducción de algunas de las reglas de la tabla se encuentran en los ejercicios resueltos, otras están propuestas como ejercicios.

EJERCICIOS RESUELTOS

Derivadas por definición

5.1 Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=c$ función constante

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

b) $f(x)=x^n$ con n natural. (función potencia)



Recordar que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \dots + \binom{n}{n-1} x h^{n-1} + \binom{n}{n} h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \dots + nx h^{n-2} + h^{n-1} \right] = nx^{n-1} \end{aligned}$$

✓

c) $f(x) = \text{Sen } x$ función seno

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Sen}(x+h) - \text{Sen } x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } x \text{Cosh} + \text{Cos } x \text{Senh} - \text{Sen } x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\text{Sen } x (\text{Cosh} - 1)}{h} + \text{Cos } x \frac{\text{Senh}}{h} \right] = \text{Sen } x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Cosh} - 1}{h} + \text{Cos } x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Senh}}{h} = \text{Sen } x \cdot 0 + \text{Cos } x \cdot 1 = \text{Cos } x \end{aligned}$$

✓

d) $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

✓

Cálculo de derivadas en un punto

5.2 Calcular la derivada de $f(x) = x + \cos x$ en $x = \frac{\pi}{3}$.

Se puede proceder en tres formas distintas:

a) Deducir, por definición, la función derivada y luego calcularla en $x = \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) + \cos(x+h) - x - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\cos x \cosh - \text{sen } x \text{senh} - \cos x}{h} \right) \\ &= 1 + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cosh - 1}{h} \right) - \text{sen } x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{senh}}{h} = 1 + 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \text{sen } x \\ &= 1 - \text{sen } x \end{aligned}$$

Evaluamos f' en $x = \frac{\pi}{3}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) O bien, se calcula directamente por definición $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$:

$$\begin{aligned}
 f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{3} + h + \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \cos\frac{\pi}{3} \cosh - \sin\frac{\pi}{3} \sinh - \cos\frac{\pi}{3}}{h} \\
 &= 1 + \cos\frac{\pi}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} - \sin\frac{\pi}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = 1 - 0 \cdot \cos\frac{\pi}{3} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

c) Otra forma es obtener la función derivada usando la tabla de derivadas:

$$f'(x) = (x + \cos x)' = (x)' + (\cos x)' = 1 - \sin x.$$

Se usó también que la derivada de una suma es la suma de las derivadas, véase álgebra de derivadas.

Evaluamos ahora en $x = \frac{\pi}{3}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Derivadas laterales

5.3 Calcular las derivadas laterales y decidir la existencia de la derivada de f en los puntos indicados.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2 + \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ -e^x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 0$$

f no es continua en el origen, por lo cual no existe $f'(0)$, sin embargo, podemos calcular las derivadas laterales en este punto.

Se debe tener cuidado al sustituir la función f , porque está definida a la izquierda y a la derecha de x_0 de diferente forma.

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2 + \ln(h+1) - 2 - \ln 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-e^h - 2}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^h + 2}{h} = +\infty.$$

La derivada lateral izquierda en $x = 0$ no es finita.



$$b) f(x) = |x^2 - 4| \quad \text{en } x_0 = 2$$

$$f'_+(2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|(2+h)^2 - 4| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h^2 + 4h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(h+4)}{h} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h^2 + 4h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h||h+4|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h|h+4|}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0^-} |h+4| = -4$$

Se obtuvo que $f'_+(2) \neq f'_-(2)$, luego f no es derivable en 2. Observe que f es continua en $x = 2$.



$$c) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ (x+1)^2 & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = -1.$$

Se puede comprobar que esta función es continua en -1 , por lo tanto, podría existir la derivada en dicho punto.

$$f'_-(-1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-1+h)+1-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$$f'_+(-1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(-1+h+1)^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$$

También aquí se obtuvo que $f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$, luego $f'(-1)$ no existe.



$$d) f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x^3 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 1$$

f es continua en 1, por lo tanto, debemos estudiar las derivadas laterales en dicho punto.

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(1+h)^3 + 1 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h(3+3h+h^2)}{h} = 6$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3(1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h(2+h)}{h} = 6$$

Tenemos que las derivadas laterales son iguales y f es continua por lo tanto $f'(1) = 6$.



e) Calcular los valores de a y b para los cuales f es derivable en x_0 ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

La condición necesaria es que f sea continua en x_0 ; para ello se debe tener la igualdad de los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} x^2 = (x_0)^2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (ax + b) = ax_0 + b$$

luego

$$(x_0)^2 = ax_0 + b.$$

Por otro lado, se tiene que $f'_-(x_0) = 2x_0$ y $f'_+(x_0) = a$. Para que f sea derivable en este punto las derivadas laterales deben ser iguales, es decir,

$$2x_0 = a.$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax_0 + b = (x_0)^2 \\ a = 2x_0 \end{cases}$, cuya solución es $a = 2x_0$ y $b = -(x_0)^2$.



Algebra de derivadas

5.4 Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{sen } x$, calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $F(x) = f(x) + g(x)$

$$F'(x) = f'(x) + g'(x) = (x^2)' + (\text{sen } x)' = 2x + \cos x$$



b) $F(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (x^2)' \text{sen } x + x^2 (\text{sen } x)' = 2x \text{sen } x + x^2 \cos x$$



$$c) F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{(x^2)' \operatorname{sen} x - x^2 (\operatorname{sen} x)'}{(\operatorname{sen} x)^2} = \frac{2x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$



Regla de la cadena

5.5 En los siguientes ejercicios hallar $\frac{dy}{dx}$.

$$a) y = (x^5 + x^{10})^{20}$$

$$y = \underbrace{(x^5 + x^{10})}_{fi}^{20 \rightarrow fe}, \text{ por lo tanto, } y' = \underbrace{20(x^5 + x^{10})^{19}}_{\text{derivada de fe}} \cdot \underbrace{(5x^4 + 10x^9)}_{\text{derivada de fi}}.$$



$$b) y = 3(2x+1)^{1/2} - 5(x^3+x)^{-1/4}$$

$$y = 3 \underbrace{(2x+1)}_{fi}^{1/2 \rightarrow fe} - 5 \underbrace{(x^3+x)}_{fi}^{-1/4 \rightarrow fe}$$

$$y' = 3 \underbrace{\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}}_{\text{derivada de fe}} \cdot \underbrace{(2x+1)'}_{\text{der. de fi}} - 5 \underbrace{\left(-\frac{1}{4}\right)(x^3+x)^{-5/4}}_{\text{derivada de fe}} \cdot \underbrace{(x^3+x)'}_{\text{der. de fi}} = \frac{3}{2}(2x+1)^{-1/2} \cdot 2 + \frac{5}{4}(x^3+x)^{-5/4}(3x^2+1).$$



$$c) y = \operatorname{Cos}(\operatorname{Sen}(x^2))$$

$$y = \underbrace{\operatorname{Cos}}_{fe} \left(\underbrace{\operatorname{Sen}(x^2)}_{fi} \right)$$

$$y' = \underbrace{-\operatorname{Sen}(\operatorname{Sen}(x^2))}_{\text{derivada de fe}} \cdot \underbrace{(\operatorname{Sen}(x^2))'}_{\substack{fe \\ \text{derivada de fi}}} = -\operatorname{Sen}(\operatorname{Sen}(x^2)) \cdot \underbrace{\operatorname{Cos}(x^2)}_{\text{der. de fe}} \cdot \underbrace{(x^2)'}_{\text{der. fi}} = -\operatorname{Sen}(\operatorname{Sen}(x^2)) \cdot \operatorname{Cos}(x^2) \cdot 2x$$



De ahora en adelante, observe por Ud. mismo, cuáles son en cada paso la función interna y la externa.

$$d) y = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} (x^2 + 1)' \right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$



e) $y = e^{\sec(\text{Log}(x^2+1))}$

$$\begin{aligned} y' &= e^{\sec(\text{Log}(x^2+1))} \cdot (\sec(\text{Log}(x^2+1)))' = e^{\sec(\text{Log}(x^2+1))} \cdot \sec(\text{Log}(x^2+1)) \cdot \text{tg}(\text{Log}(x^2+1)) \cdot (\text{Log}(x^2+1))' \\ &= e^{\sec(\text{Log}(x^2+1))} \cdot \sec(\text{Log}(x^2+1)) \cdot \text{tg}(\text{Log}(x^2+1)) \cdot \frac{\text{Log}e}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' \\ &= e^{\sec(\text{Log}(x^2+1))} \cdot \sec(\text{Log}(x^2+1)) \cdot \text{tg}(\text{Log}(x^2+1)) \cdot \frac{\text{Log}e}{x^2+1} \cdot 2x \end{aligned}$$



f) $y = 3^{\text{tgh}4x}$

$$y' = 3^{\text{tgh}4x} \text{Ln}3 \cdot (\text{tgh}4x)' = 3^{\text{tgh}4x} \text{Ln}3 \cdot \text{Sech}^2 4x \cdot (4x)' = 3^{\text{tgh}4x} \text{Ln}3 \cdot \text{Sech}^2 4x \cdot 4$$



g) $y = x^\pi \pi^x$

$$y' = (x^\pi)' \pi^x + x^\pi (\pi^x)' = \pi x^{\pi-1} \pi^x + x^\pi \pi^x \text{Ln} \pi.$$



h) $y = \left(\frac{x}{\sqrt[4]{2x+1}} \right)^{1/x}$

Recuerde que se puede reescribir esta función usando la función exponencial de base e, como sigue:

$$y = e^{\frac{1}{x} \text{Ln} \left(\frac{x}{\sqrt[4]{2x+1}} \right)} = e^{\frac{1}{x} (\text{Ln} x - \text{Ln} \sqrt[4]{2x+1})} = e^{\frac{1}{x} \left(\text{Ln} x - \frac{1}{4} \text{Ln}(2x+1) \right)},$$

y de esta forma resulta más cómodo para derivar.

$$\begin{aligned} y' &= e^{\frac{1}{x} \left(\text{Ln} x - \frac{1}{4} \text{Ln}(2x+1) \right)} \cdot \left(\frac{1}{x} (\text{Ln} x - \frac{1}{4} \text{Ln}(2x+1)) \right)' \\ &= e^{\frac{1}{x} \left(\text{Ln} x - \frac{1}{4} \text{Ln}(2x+1) \right)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} (\text{Ln} x - \frac{1}{4} \text{Ln}(2x+1)) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1/4}{2x+1} \cdot 2 \right) \right). \end{aligned}$$



Derivación implícita

5.6 Hallar la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ de las funciones dadas implícitamente por:

a) $x^3 + x^2 y + y^2 = c$

Recordar que y es una función y x una variable.

$$3x^2 + \underbrace{2xy + x^2 y'}_{\frac{d}{dx}(x^2 y)} + \underbrace{2yy'}_{\frac{d}{dx}(y^2)} = 0, \quad \text{luego } y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}.$$



b) $y^2 = x + \text{Ln} \frac{y}{x}$ en el punto (1,1).

$$2yy' = 1 + \frac{1}{\frac{y}{x}} \left(\frac{y}{x} \right)' ; 2yy' = 1 + \frac{x}{y} \left(\frac{y'x - y}{x^2} \right) \quad \text{de donde} \quad y' = \frac{y}{x} \left(\frac{x-1}{2y^2-1} \right).$$

Evaluamos ahora en el punto dado, es decir, para $x=y=1$: $y' = 0$.



c) $x + \text{Log}_3 xy = 4$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Encontremos previamente el valor de la ordenada, para ello sustituimos $x = 1$: $1 + \text{Log}_3 y = 4 \Rightarrow y = 27$.

Derivamos:

$$1 + \frac{\text{Log}_3 e}{xy} (y + xy') = 0, \text{ sustituyendo los valores de } x \text{ e } y \text{ se tiene } 1 + \frac{\text{Log}_3 e}{27} (27 + y') = 0, \text{ despejando resulta}$$

$$y'|_{x=1} = -\frac{27}{\text{Log}_3 e} (1 + \text{Log}_3 e).$$



Derivación logarítmica

La derivada de una función dada por productos, cocientes o potencias se obtiene, a veces, más fácilmente tomando logaritmo a ambos lados.

$$5.7 \quad y = \frac{\sqrt{\text{sen } x \cos x}}{1 - 2\text{Lnx}}.$$

Aplicando logaritmo a ambos lados y luego las propiedades tenemos

$$\text{Lny} = \text{Ln} \left(\frac{\sqrt{\text{sen } x \cos x}}{1 - 2\text{Lnx}} \right) = \frac{1}{2} \text{Ln}(\text{sen } x) + \frac{1}{2} \text{Ln}(\cos x) - \text{Ln}(1 - 2\text{Lnx}).$$

Ahora se deriva la ecuación anterior

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\text{sen } x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\text{sen } x}{\cos x} - \frac{1}{1 - 2\text{Lnx}} \cdot \frac{-2}{x} \quad \text{de donde} \quad y' = \left(\frac{\sqrt{\text{sen } x \cos x}}{1 - 2\text{Lnx}} \right) \left(\frac{1}{2} (\cot x - \tan x) + \frac{2}{x(1 - 2\text{Lnx})} \right).$$



$$5.8 \quad y = x^{e^{-x^2}} \cos^2 x$$

$$\text{Lny} = \text{Ln} \left(x^{e^{-x^2}} \right) + \text{Ln}(\cos^2 x) = e^{-x^2} \text{Lnx} + 2\text{Ln}(\cos x), \text{ por lo tanto derivando a ambos lados se tiene}$$

$$\frac{y'}{y} = e^{-x^2} (-2x) \text{Lnx} + e^{-x^2} \frac{1}{x} + 2 \frac{-\text{sen } x}{\cos x},$$

$$\text{de donde} \quad y' = x^{e^{-x^2}} \cos^2 x (e^{-x^2} (-2x) \text{Lnx} + e^{-x^2} \frac{1}{x} + 2 \frac{-\text{sen } x}{\cos x}).$$



Derivada de la función inversa

5.9 Probar que:

$$a) (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Sea $y = f^{-1}(u) = \arccos u$ con $-1 \leq u \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$; $f(y) = \cos y$, $f'(y) = -\text{sen } y$, luego sustituyendo en la fórmula para la derivada de la función inversa se tiene

$$(\arccos u)' = \frac{u'}{-\sin(\arccos u)} = -\frac{u'}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos u)}} = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$$

recordar que $\sin y$ es positivo si $0 < y < \pi$.



$$b) (\operatorname{arcsec} u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}.$$

Sea $y = f^{-1}(u) = \operatorname{arcsec} u$ con $u \leq -1$ o $u \geq 1$, por lo tanto $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ o bien $\frac{\pi}{2} < y \leq \pi$;

$f(y) = \sec y$, $f'(y) = \sec y \operatorname{tg} y$; sustituyendo en la fórmula para la derivada de la función inversa se tiene:

$$(\operatorname{arcsec} u)' = \frac{u'}{\sec(\operatorname{arcsec} u) \operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} u)} = \frac{u'}{u(\pm \sqrt{\sec^2(\operatorname{arcsec} u) - 1})} = \frac{u'}{\pm u \sqrt{u^2 - 1}} = \frac{u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}},$$

\pm proviene del hecho de que la función tangente es positiva para en $[0, \frac{\pi}{2})$ y negativa en $(\frac{\pi}{2}, \pi]$.



5.10 Dar la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arctg}(\sinh x)$

$$y' = \frac{1}{1 + \sinh^2 x} \cdot (\sinh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \cdot \cosh x = \operatorname{sech} x.$$



b) $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos 2x)$

$$y' = -\frac{1}{\cos 2x \sqrt{1 - \cos^2 2x}} \cdot (\cos 2x)' = -\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x \sqrt{1 - \cos^2 2x}} = -2 \frac{\operatorname{tg} 2x}{|\sin 2x|}.$$



c) $y = \cosh^{-1} x$

Para obtener la regla de derivación de las funciones hiperbólicas inversas resulta más fácil usar la expresión algebraica que las define en vez de la fórmula general para derivación de una función inversa.

$$\cosh^{-1} x = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{con } |x| \geq 1. \quad \text{Luego:}$$

$$(y' = \cosh^{-1} x)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$



Derivación paramétrica

5.11 Calcular la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ de la siguiente función dada en forma paramétrica:

$$x = e^t \operatorname{sen} t \quad y = e^t \operatorname{cost}.$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \operatorname{sen} t + e^t \operatorname{cost} = e^t (\operatorname{sen} t + \operatorname{cost}) ; \quad \frac{dy}{dt} = e^t \operatorname{cost} - e^t \operatorname{sen} t = e^t (\operatorname{cost} - \operatorname{sen} t), \text{ luego}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t (\operatorname{cost} - \operatorname{sen} t)}{e^t (\operatorname{sen} t + \operatorname{cost})} = \frac{\operatorname{cost} - \operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t + \operatorname{cost}}.$$



5.12 Calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la curva $\begin{cases} x = t \operatorname{Lnt} \\ y = \frac{\operatorname{Lnt}}{t} \end{cases}$, para $t = 1$.

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{Lnt} + 1 \quad y \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - \operatorname{Lnt}}{t^2} = \frac{1 - \operatorname{Lnt}}{t^2}. \text{ Por lo tanto } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1 - \operatorname{Lnt}}{t^2}}{\operatorname{Lnt} + 1} = \frac{1 - \operatorname{Lnt}}{t^2 (\operatorname{Lnt} + 1)}.$$

Para $t = 1$ se tiene $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1$.



5.13 Calcular la derivada de la función dada paramétricamente por: $x = e^{-2t} + 1$ e $y = e^t - 3$, en el punto $(2, -2)$.

Previamente se debe hallar el valor de t que sustituido en las ecuaciones de la curva da el punto $(2, -2)$:

$$\begin{cases} e^{-2t} + 1 = 2 \\ e^t - 3 = -2 \end{cases}, \text{ la solución del sistema es } t = 0.$$

$$\frac{dx}{dt} = -2e^{-2t} \quad y \quad \frac{dy}{dt} = e^t, \text{ por lo cual } \frac{dy}{dx}(t) = \frac{e^t}{-2e^{-2t}} = -\frac{1}{2} e^{3t}. \text{ Para calcular la derivada en el punto } (2, -2)$$

se sustituye $t = 0$: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2, -2)} = -\frac{1}{2}.$



Derivadas de orden superior

5.14 Hallar las derivadas segundas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3-x}{3+x}$

$$f'(x) = \frac{(3-x)'(3+x) - (3-x)(3+x)'}{(3+x)^2} = \frac{(-1)(3+x) - (3-x) \cdot 1}{(3+x)^2} = \frac{-6}{(3+x)^2}$$

$$f''(x) = \left(-6(3+x)^{-2} \right)' = 12(3+x)^{-3} = \frac{12}{(3+x)^3}.$$



b) $y = a \cosh \frac{x}{a}$, ecuación de la catenaria.

$$y' = a \operatorname{senh} \frac{x}{a} \cdot \left(\frac{1}{a} \right) = \operatorname{senh} \frac{x}{a}$$

$$y'' = \cosh \frac{x}{a} \cdot \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}.$$



5.15 a) Hallar $f'''(0)$ siendo $f(x) = a^x$.

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a \quad f''(x) = a^x (\ln a)^2 \quad f'''(x) = a^x (\ln a)^3, \text{ luego } f'''(0) = (\ln a)^3.$$



b) Hallar y'' en el punto $(0,1)$ si $x^4 - xy + y^4 = 1$.

Por derivación implícita se tiene $4x^3 - y - xy' + 4y^3y' = 0$; sustituyendo las coordenadas del punto $(x=0, y=1)$ se calcula que $y'|_{(0,1)} = \frac{1}{4}$.

Se vuelve a derivar implícitamente: $12x^2 - y' - y' - xy'' + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 0$, sustituyendo de nuevo las coordenadas y el valor de y' en el punto se obtiene que $y''|_{(0,1)} = -\frac{1}{16}$.



5.16 Dada la cicloide cuyas ecuaciones paramétricas son $x = a(t - \sin t)$ e $y = a(1 - \cos t)$, deducir:

a) Los valores de t para los cuales $\frac{dy}{dx} = 0$ y donde no está definida. b) $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}.$$

$\frac{dy}{dx}$ no está definida si $1 - \cos t = 0$, esta tiene como soluciones $t = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado, $\frac{dy}{dx} = 0$ si $a \sin t = 0$, es decir, $t = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



b) La derivada segunda podemos obtenerla usando la fórmula dada en el resumen o bien

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} \right) \frac{1}{a(1 - \cos t)} = \frac{a \cos t \cdot a(1 - \cos t) - a \sin t \cdot a \sin t}{a^2(1 - \cos t)^2} \cdot \frac{1}{a(1 - \cos t)} = \frac{-1}{a(1 - \cos t)} \end{aligned}$$



5.17 El movimiento de un resorte con una masa m suspendida (sin amortiguamiento) se describe mediante la ecuación diferencial $my'' + ky = 0$. Comprobar que la función $y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ con $\omega = \sqrt{k/m}$, satisface la ecuación diferencial.

Se debe obtener la segunda derivada y sustituir en la ecuación:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad y'(t) = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t, \quad y''(t) = -A \omega^2 \cos \omega t - B \omega^2 \sin \omega t,$$

$$my'' + ky = m(-A \omega^2 \cos \omega t - B \omega^2 \sin \omega t) + k(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$= -Am \left(\sqrt{k/m} \right)^2 \cos \omega t - Bm \left(\sqrt{k/m} \right)^2 \sin \omega t + kA \cos \omega t + kB \sin \omega t = 0$$



5.18 Calcular la derivada n -ésima de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}; \quad f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}; \quad f^{(IV)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}; \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$



b) $y = \sin x$

$$y' = \cos x; \quad y'' = -\sin x; \quad y''' = -\cos x; \quad y^{IV} = \sin x; \quad y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$



c) $y = xe^x$

$$\begin{aligned} y' &= e^x + xe^x = (1+x)e^x & y'' &= e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x \\ y''' &= e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x & y^{IV} &= e^x + (3+x)e^x = (4+x)e^x \\ y^{(n)} &= (n+x)e^x. \end{aligned}$$



5.19 Dar el desarrollo de la función $f(x) = e^x$ en serie de McLaurin y calcular el valor de e , usando 5 términos de la serie y trabajando con 5 cifras decimales.

La derivada enésima de la función es $f^{(n)}(x) = e^x$. En los ejercicios propuestos, n° 27 se puede ver como está definida la serie de McLaurin:

$$e^x \approx e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + \frac{e^0}{4!}x^4 \dots, \quad \text{para } x=1 \text{ se tiene; tomando 5 términos del desarrollo:}$$

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 1 + 1 + 0.5 + 0.16667 + 0.04167 = 2.70834$$



EJERCICIOS PARA SER RESUELTOS POR EL ESTUDIANTE

1.- Usando la definición, calcular la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

1.1 $f(x) = -3x^2$

1.2 $f(x) = \frac{1}{x}$

1.3 $f(x) = \sec x$

1.4 $f(x) = x^3 - 2x + 3$

1.5 $f(x) = \sqrt{3x-1}$

1.6 $f(x) = 3^x$

1.7 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$

1.8 $f(x) = \ln x$

1.9 $f(x) = \cos 3x$

2.- Estudie la existencia de $f'(x_0)$ para cada una de las siguientes funciones. Dibuje, en caso de ser posible, su gráfico.

2.1 $f(x) = |1-2x|$ $x_0 = 0.5$

2.2 $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

2.3 $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

2.4 $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^3 + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \leq 1 \\ k(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$, hallar el valor de k para que exista $f'(1)$.

- 4.- a) Sea f una función tal que $|f(x)| \leq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es derivable en $x = 0$.
 b) ¿Puede este resultado generalizarse si x^2 se reemplaza por $|g(x)|$? ¿Qué propiedad debe tener g ?
- 5.- ¿Para qué valores de a y b la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$, es derivable en $x=1$?

6.- Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=f(x)+g(x)$

b) $y=f(x)-g(x)$

c) $y=f(x) \cdot g(x)$

d) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$,

siendo

6.1 $f(x) = 2x^3$ y $g(x) = x - 2$

6.2 $f(x) = 4x^2 + x + 1$ y $g(x) = 1 - x^4$

6.3 $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \cos x$

6.4 $f(x) = (2x^3 + 1)\left(\frac{1}{x} + 2\right)$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$

6.5 $f(x) = -\sin x$ y $g(x) = \sec x$

6.6 $f(x) = e^x$ y $g(x) = \operatorname{tg}hx$

6.7 $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \operatorname{Log}_2 x$

6.8 $f(x) = \operatorname{cosec} x$ y $g(x) = \operatorname{cosech} x$

7.- Calcular la función derivada de las siguientes funciones definidas por trozos:

7.1 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

7.2 $g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Regla de la cadena

8.- Para cada una de las siguientes funciones hallar $\frac{dy}{dx}$:

8.1 $y=f(g(x))$ donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$

8.2 $y=h(f(g(x)))$ donde $h(x) = \sin x$, f y g las del ejercicio anterior.

8.3 $y = h(x) + g(x)$ donde $h = k \circ u$ y $g = u \circ k$, $k(x) = x \sin x$, $u(x) = x e^x$.

8.4 $y = 1 + u^2$, $u = \frac{1-7t}{1+t^2}$, $t = \sec x$

8.5 $y = k \cdot p$, donde $k = f \circ g$ y $p = g \circ s$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \operatorname{Ln} x$, $s(x) = \operatorname{arcsen} x$.

9.- Calcular la derivada de las siguientes funciones:

9.1 $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

9.2 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + x^5\right)^7$

9.3 $y = \left[(4 - x^3)^2 - \left(5x + 3\sqrt{\frac{2}{x^2}} \right)^4 \right]^3$

9.4 $h(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

9.5 $y = \sin^n x \cos^m x$

9.6 $y = \cos(\cot^2 x)$

9.7 $y = \frac{\sin(\sec a)}{\sec^3 \sqrt{x^3 + 1}}$

9.8 $g(x) = e^{\operatorname{tg}(2x-1)} + \sin^4\left(\frac{1}{x}\right)$

9.9 $y = \operatorname{cosec}^2\left(\frac{2^{2x}}{\operatorname{Ln}(1-x)}\right)$

9.10 $y = \operatorname{Log}\left(\sec h\left(\frac{2}{4^x}\right)\right)^2$

9.11 $y = \arccos(\log_2(x^4 + 1))$

9.12 $f(x) = \left(\frac{x^6 + 7}{x^2 + 9} \right)^{\operatorname{arctg}(x^4)}$

9.13 $f(x) = \arcsen \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right)$

9.14 $g(x) = (e^x - x)^{\operatorname{arcsec} x}$

9.15 $f(x) = \sinh^{-1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$

9.16 $y = \cosh^{-1}(x \operatorname{arc cot} gx)$

10.- Hallar $f' \left(-\frac{1}{2} \right)$ siendo $f(x) = \operatorname{arcsec} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$.

11.- Hallar $f'(0)$, siendo $f(x) = \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{3x-1} \right) + \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x+1} + (x+2)^{\cos x}$

12.- Usando derivación logarítmica calcular $\frac{dy}{dx}$:

12.1 $y = \frac{x^3 \cos x \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} \operatorname{sen} \sqrt{x}}$

12.2 $y = x^{\sqrt{2x^2+3}} (x+1)^x$

12.3 $y = \frac{\sec^2(x^3-1)}{e^{1-x}} \operatorname{tgh}^{-1}(3x)$

13.- Probar que la función $y(x) = \frac{k}{x^2-4} - 3$ es solución de la ecuación diferencial de primer orden $2xy + 6x + (x^2 - 4)y' = 0$.

Derivación paramétrica

14.- Calcule la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las funciones definidas paramétricamente por:

14.1 $x = 4 \cos t$
 $y = 4 \operatorname{sen} t$

14.2 $x = e^t \cos t$
 $y = e^t \operatorname{sen} t$ para $t = 0$

14.3 $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

14.4 $x = 2 + \sec t$
 $y = 1 + 2 \operatorname{tg} t$ cuando $t = \frac{\pi}{6}$

14.5 $x = \cosh t$, $y = \sinh t$

14.6 $x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arcsen \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$

15.- Probar que la función descrita paramétricamente por las ecuaciones $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}t^2 \\ y = -t^3 - \frac{1}{2} \end{cases}$, es una solución de la

ecuación diferencial $\left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 2x \frac{dy}{dx} = 2y + 1$.

Derivación implícita

16.- Hallar la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ de la función dada implícitamente por la ecuación:

16.1 $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

16.2 $y^2 3^x - 3^{-x} = 4y$, en el punto de ordenada $y = 1$.

16.3 $x \operatorname{Ln} y - y \operatorname{Ln} x = 1$, en el punto $(1, e)$.

16.4 $\operatorname{tgy} = xy$

16.5 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

16.6 $ye^y = e^{x+1}$, cuando $x = 0$ e $y = 1$

16.7 $y^3 \operatorname{Log}_2(x+1) - \operatorname{Log}_2(x^2-1) = y^2$, cuando $y = 1$.

16.8 $x^y = y^x$

17.- Deducir que:

$$17.1 \ (\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad 17.2 \ (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad 17.3 \ (\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$17.4 \ (\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad 17.5 \ (\operatorname{tgh}^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad 17.6 \ (\operatorname{cosech}^{-1} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

Derivadas de orden superior

18.- Halle la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ de las siguientes funciones:

$$18.1 \ y = 3x^2 + x - 4 \quad 18.4 \ y = \arcsen\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$18.2 \ y = 2 \cosh x \quad 18.5 \ y = \operatorname{Ln}(x^2 - 1) \quad , \text{ para } x = \sqrt{e-1}$$

$$18.3 \ y = \cos^2 x + \operatorname{tg} x, \text{ cuando } x = \pi. \quad 18.6 \ y = \frac{x+1}{1-x} \quad , \text{ para } x = 0.$$

19.- Halle la segunda derivada, $\frac{d^2y}{dx^2}$, de las siguientes funciones dadas en forma implícita:

$$19.1 \ x \cos y = 1 \text{ en el punto } \left(2, \frac{\pi}{3}\right) \quad 19.2 \ \cos(\sinh y) = x$$

$$19.3 \ e^{x \operatorname{Ln} y} = y + 1 \quad 19.4 \ y \operatorname{arccctg}(xy) = 4$$

$$19.5 \ x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0 \quad , \text{ en los puntos de abscisa } x = 0.$$

20.- Halle la segunda derivada, $\frac{d^2y}{dx^2}$, de las siguientes funciones dadas en forma paramétrica:

$$20.1 \ x = \operatorname{arctg} t \quad \text{e} \quad y = \operatorname{Ln}(1+t^2) \quad \text{para } t = 0 \quad 20.2 \ x = \frac{at}{1+t^3} \quad \text{e} \quad y = \frac{at^2}{1+t^3} \quad (\text{Hoja de Descartes})$$

$$20.3 \ x = e^t \quad \text{e} \quad y = e^{-3t} \quad 20.4 \ x = \operatorname{Ln}(1+t^3) \quad \text{e} \quad y = t^3$$

21.- Dada la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, probar que $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}$.

22.- Las ecuaciones paramétricas de un arco de cicloide son:

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sent}) \\ y = a(1 - \operatorname{cost}) \end{cases}, \quad 0 < t \leq 2\pi, \quad a > 0, \quad \text{pruebe que} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a \operatorname{sen}^4\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

23.- Probar que y definida como función de x por las ecuaciones paramétricas:

$$x = \operatorname{sen} \alpha, \quad y = e^{\sqrt{2}\alpha} + e^{-\sqrt{2}\alpha}$$

satisface la ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - xy' = 2y$.

24.- Probar que la función $y(x) = C_1 \sinh 2x + C_2 \cosh 2x$ es solución de la ecuación diferencial de segundo orden $y'' - 4y = 0$.

25.- Dadas las siguientes funciones, deducir una fórmula para la derivada de n-ésimo orden.

$$25.1 \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$25.2 \quad f(x) = e^{2x}$$

$$25.3 \quad f(x) = \sin x$$

$$25.4 \quad f(x) = \arctg x$$

$$25.5 \quad f(x) = \frac{1}{2x-1}$$

$$25.6 \quad f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

26.- ¿Qué valores deben tomar las constantes a, b y c para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq x_0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > x_0 \end{cases}, \text{ tenga segunda derivada en } x_0?$$

27.- La suma infinita

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

se llama **serie de McLaurin**. Dar el desarrollo de dicha serie para las funciones:

$$27.1 \quad f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 4$$

$$27.2 \quad f(x) = \cos x$$

$$27.3.- \quad f(x) = \ln(x+1)$$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS IMPARES

$$1.1 \quad -6x$$

$$1.3 \quad \sec x \operatorname{tag} x$$

$$1.5 \quad \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

$$1.7 \quad -2 \frac{x^2 + x - 4}{(x^2 - 4)^2}$$

$$1.9 \quad -3\sin 3x$$

$$2.1 \quad f'(0.5) \text{ no existe.}$$

$$2.3 \quad f'(0) = 0$$

$$3 \quad k=1$$

$$5 \quad a=e \text{ y } b=0$$

6.1

$$a) \quad y' = 6x^2 + 1$$

$$b) \quad y' = 6x^2 - 1$$

$$c) \quad y' = 6x^2(x-2) + 2x^3$$

$$d) \quad y' = \frac{6x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^2}$$

6.3

$$a) \quad \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - \sin x$$

$$b) \quad \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin x$$

$$c) \quad \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x$$

$$d) \quad \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x} \cos x} + \frac{\sqrt{x} \sin x}{\cos^2 x}$$

6.5

$$a) \quad -\cos x + \sec x \operatorname{tag} x$$

$$b) \quad -\cos x - \sec x \operatorname{tag} x$$

$$c) \quad -\cos x \sec x - \sin x \sec x \operatorname{tag} x$$

$$d) \quad -\frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x \operatorname{tag} x}{\sec x}$$

6.7

$$a) \quad 3^x \ln 3 + \frac{1}{x \ln 2}$$

$$b) \quad 3^x \ln 3 - \frac{1}{x \ln 2}$$

$$c) \quad \frac{3^x \ln 3 \ln x}{\ln 2} - \frac{3^x}{x \ln 2}$$

$$d) \quad \frac{3^x \ln 3 \ln 2}{\ln x} - \frac{3^x \ln 2}{(\ln x)^2 x}$$

$$7.1 \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{f no derivable en } x=0 \text{ porque no es continua. } f'_+(-1) \neq f'_-(-1).$$

$$8.1 \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$8.3 \quad e^x \operatorname{sen}(xe^x) + xe^x \operatorname{sen}(xe^x) + xe^x \cos(xe^x)(e^x + xe^x) + \operatorname{sen} x e^{x \operatorname{sen} x} + x \cos x e^{x \operatorname{sen} x} + x \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x + x \cos x) e^{x \operatorname{sen} x}$$

$$8.5 \quad \frac{1}{3} \frac{\ln(\operatorname{arcsen} x)}{(\ln x)^{2/3} x} + \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x}$$

$$9.1 \quad \frac{1}{2} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$9.3 \quad 3 \left((4-x^3)^2 - \left(5x + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}} \right)^4 \right)^2 \left(-6(4-x^3)x^2 - 4 \left(5x + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}} \right)^3 \left(5 - \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^5}} \right) \right)$$

$$9.5 \quad \frac{\operatorname{sen}^n(x) \operatorname{ncos}(x) \operatorname{sen}^m(x)}{\operatorname{sen}(x)} + \frac{\operatorname{sen}^n(x) \operatorname{sen}^m(x) m \cos x}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$9.7 \quad -\frac{9}{2} \frac{\operatorname{sen}(\sec(a)) \operatorname{tg}(\sqrt{x^3+1}) x^2}{\sec^3(\sqrt{x^3+1}) \sqrt{x^3+1}}$$

$$9.11 \quad \frac{-4x^3}{\sqrt[4]{-\left(\frac{\ln(x^4+1)}{\ln 2}\right)^2 (x^4+1) \ln 2}}$$

$$9.13 \quad \frac{-2 \frac{x}{1+x^2} - 2 \frac{(1-x^2)x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1 - \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} + 0.5 \frac{\left(-\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} - \frac{(1+\cos x) \operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2} \right) (1-\cos x)}{1+\cos x}$$

$$9.15 \quad \frac{2 \frac{x}{1+x^2} - 2 \frac{(x^2-1)x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(1+x^2)^2} + 1}}$$

$$11 \quad -\frac{11}{6} \sqrt{2} + 1$$

$$12.1 \quad \frac{5}{2} \cos x \sqrt{x+1} \operatorname{sen} \sqrt{x} - x^{5/2} \operatorname{sen} x \sqrt{x+1} \operatorname{sen} \sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{x^{5/2} \cos x \operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2} x^2 \cos x \sqrt{x+1} \cos \sqrt{x}$$

$$12.3 \quad 6 \frac{\sec^2(x^3+1) \operatorname{tgh}^{-1}(3x) \operatorname{tg}(x^3+1) x^2}{e^{1-x}} + 3 \frac{\sec^2(x^3+1)}{(1-9x^2) e^{1-x}} + \frac{\sec^2(x^3+1) \operatorname{tgh}^{-1}(3x)}{e^{1-x}}$$

$$14.1 \quad -\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$14.3 \quad \frac{6 \frac{at}{1+t^3} - 9 \frac{at^4}{(1+t^3)^2}}{3 \frac{a}{1+t^3} - 9 \frac{at^3}{(1+t^3)^2}}$$

$$14.5 \quad \frac{\cosh t}{\operatorname{sen} ht}$$

$$16.1 \quad -\frac{3x^2 + 2xy + 2x}{x^2}$$

$$16.2 \quad -(1-e)e$$

$$16.5 \quad -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$16.7 \quad 2\frac{1}{\ln 2 \left(2.749 \frac{1}{\ln 2} - 2 \right)}$$

$$18.1 \quad 6$$

$$18.3 \quad -2$$

$$18.5 \quad 2\frac{1}{e-2} - 4\frac{e-1}{(e-2)^2}$$

$$19.1 \quad -7\sqrt{3}/36$$

$$19.3 \quad \frac{e^{x \operatorname{Lny} [(y \operatorname{Lny} + xy')^2 + 2yy' - x(y')^2]}}{y(y - xe^{x \operatorname{Lny}})}$$

$$19.5 \quad -\frac{9}{(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} \quad y \quad -\frac{1}{1-\sqrt{3}}$$

$$20.1 \quad 2$$

$$20.3 \quad 12e^{-5t}$$

$$25.1 \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{x^{n+2}}$$

$$25.3 \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$25.5 \quad \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x-1)^n}$$

$$27.1 \quad f(x) \approx -4 + x - 2x^2 + 3x^3 + x^4$$

$$27.3 \quad f(x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

6 APLICACIONES

Este capítulo está dedicado a mostrar algunos de los problemas más inmediatos que podemos resolver con el incomparable instrumento de la derivada y algunas de sus consecuencias teóricas. En las más variadas disciplinas técnicas y ciencias básicas: física, química, matemáticas, ingeniería, medicina, economía, surgen innumerables problemas de búsqueda de máximo o mínimo de alguna magnitud sujeta a determinadas condiciones. A título de motivación y como contribución al acervo cultural de los lectores de estas notas, les presento uno de ellos:

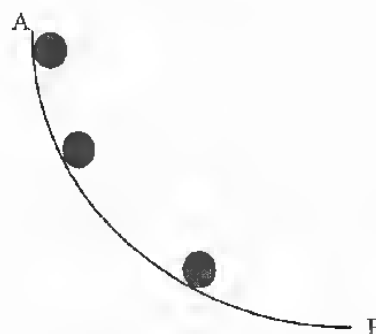
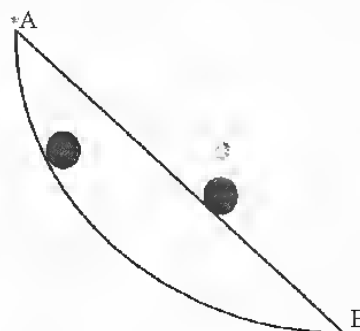
¿Qué forma debe tener la curva seguida por una bola, desprovista de rozamiento y bajo los efectos de la fuerza de gravedad, para ir desde el punto A al punto B, situados en un plano vertical, en el mínimo tiempo posible?

A simple vista, pareciera que la solución debe ser el segmento de recta que une los puntos A y B, pues, así la bola recorre el camino más corto entre A y B. Pero se trata de encontrar el tiempo mínimo y no del camino más corto.

Galileo abordó este problema pero pensaba erróneamente que la solución era un arco de circunferencia. En 1696 Johann Bernoulli, matemático Suizo, planteó el problema a los matemáticos de Europa. En el transcurso de un lapso menor a un año habían resuelto el problema Newton, Leibniz, L'Hôpital y los hermanos Johann y James Bernoulli. Según la literatura, Newton lo resolvió en una noche.

Lo más sorprendente es que la solución debe tener la forma de un arco de cicloide, véase el problema 3.37 del capítulo de funciones, debido a ello, esta curva recibió el extravagante nombre de "braquistocrona" que consta de dos palabras griegas, mínimo y tiempo. Pero aún más asombroso es que al soltar bolas en diferentes puntos, éstas tardan exactamente el mismo tiempo en llegar a B.

Cabe señalar que las demostraciones hechas para este problema escapan del alcance de los objetivos propuestos para estas notas y dieron lugar a una nueva rama de las matemáticas, Cálculo Variacional, que consta de buscar las curvas que ofrecen el valor mínimo (o máximo) a una magnitud que nos interesa.



6.1 Definiciones

****f tiene un máximo relativo en x_0 si y sólo si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 tal que**

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in I, \text{ con } x \neq x_0.$$

****f tiene un mínimo relativo en x_0 si y sólo si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 tal que**

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in I, \text{ con } x \neq x_0.$$

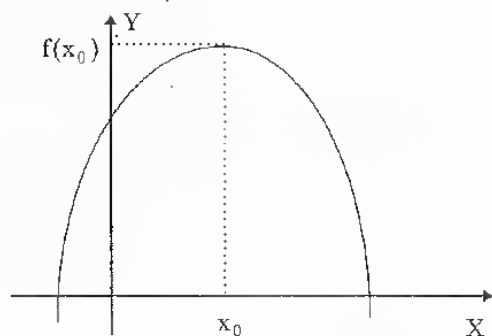
****f tiene un máximo absoluto en x_0 si y sólo si**

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in D(f), \text{ con } x \neq x_0.$$

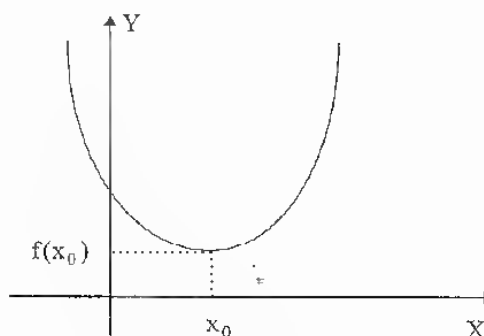
f tiene un **mínimo absoluto en x_0 si y sólo si

$$f(x_0) < f(x) \forall x \in D(f), \text{ con } x \neq x_0.$$

Se entiende por **valor máximo o mínimo** el valor de f en x_0 , es decir $f(x_0)$, es común denominarlos por valores extremos.



f alcanza un valor máximo en x_0 .



f alcanza un valor mínimo en x_0 .

6.2 Definición

Un punto $x_0 \in D(f)$ es un **número crítico de f** si y sólo si se tiene una de las siguientes posibilidades:

- i) $f'(x_0) = 0$
- ii) $f'(x_0)$ no existe.
- iii) Si x_0 es un extremo del dominio, siendo éste un intervalo cerrado.

Si x_0 es un número crítico de f entonces el valor de f en x_0 se llamará **valor crítico**.

6.3 Teorema

Si f alcanza un valor extremo en x_0 entonces x_0 es un número crítico de f .

El recíproco de este teorema es falso, es decir, x_0 puede ser un número crítico de f sin que f tenga un máximo o mínimo en x_0 . véase ejemplo 6.22

El siguiente teorema se debe al matemático francés Michell Rolle (1652-1719):

6.4 Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

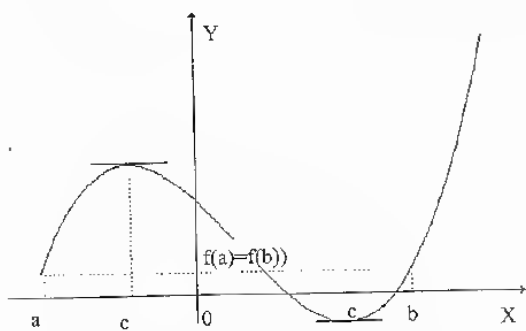
$$f'(c) = 0.$$

6.5 Teorema del Valor Medio (Lagrange)

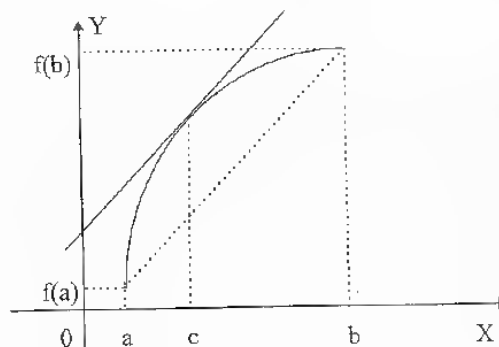
Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Este teorema considerado entre los más importantes del Análisis Matemático fue demostrado por ~~primer~~ vez por el matemático francés Joseph -Louis Lagrange (1736-1813).



Teorema de Rolle



Teorema del Valor Medio

6.6 Teorema del Valor Medio Generalizado (Cauchy)

Si f y g son continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) y tal que $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Su demostración se debe al también francés Augustin L. Cauchy (1789-1857).

6.7 Regla de L'Hôpital (Indeterminaciones $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$)

Si f y g son funciones derivables en algún intervalo (a, b) que contiene a c , excepto posiblemente en c , $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si éste existe o es infinito.

NOTA: - La regla sigue siendo válida si:

$$1.- \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$$

2.- Los límites son reemplazados por límites laterales o si $c = \pm\infty$.

El nombre de esta importante herramienta de cálculo es en honor al matemático, también francés, Guillaume Francois Antoine De L'Hôpital (1661-1704), quien publicó el primer libro de Cálculo que versaba sobre secciones cónicas.

6.8 Teorema (Criterio de la primera derivada para crecimiento y decrecimiento)

Si f es una función derivable en un intervalo abierto I se tiene:

- i) $f'(x) > 0 \forall x \in I$ entonces f es creciente en I .
- ii) $f'(x) < 0 \forall x \in I$ entonces f es decreciente en I .

Notas:

1) Si f representa la posición instantánea de una partícula que se mueve en línea recta, una consecuencia de este teorema es que si $f'(t) > 0 \forall t \in I$ entonces la partícula se mueve hacia la derecha; y si $f'(t) < 0 \forall t \in I$ entonces el movimiento es hacia la izquierda.

2) Las definiciones de crecimiento y decrecimiento fueron introducidas en 3.8, sin embargo, el estudio de estas propiedades geométricas se postergaron hasta el presente capítulo debido a que, con la herramienta de la derivada, en particular el teorema anterior, dicho estudio se simplifica enormemente si lo comparamos con un estudio directo donde las herramientas sean las definiciones.

6.9 Teorema (Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos)

Sea f una función continua en su número crítico x_0 . Derivable en un intervalo abierto I que contiene a x_0 , excepto probablemente en x_0 .

- i) Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) < 0$ a la derecha x_0 entonces $f(x_0)$ es un valor máximo.
- ii) Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) > 0$ a la derecha x_0 entonces $f(x_0)$ es un valor mínimo.
- iii) Si f' no cambia de signo en x_0 entonces $f(x_0)$ no es un valor máximo ni mínimo.

6.10 Definiciones

El gráfico de f es cóncavo hacia arriba en (a,b) si y sólo si para cada par de números $x_1, x_2 \in (a,b)$ se tiene que $y(x) > f(x) \forall x \in [x_1, x_2]$ donde $y(x)$ es la cuerda que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

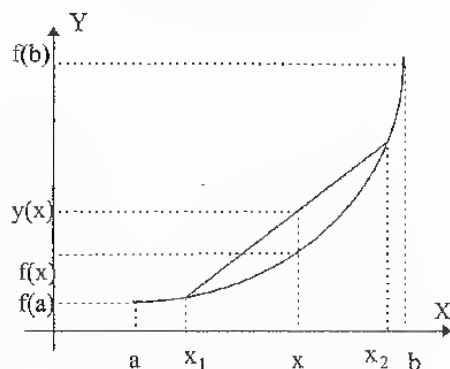
El gráfico de f es cóncavo hacia abajo en (a,b) si y sólo si para cada par de números $x_1, x_2 \in (a,b)$ se tiene que $y(x) < f(x) \forall x \in [x_1, x_2]$ donde $y(x)$ es la cuerda que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión del gráfico de f si en él se produce un cambio de concavidad.

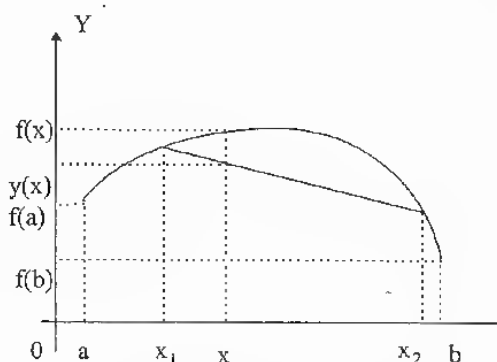
Notación:

Gráfico cóncavo hacia arriba..... $f \cup$

Gráfico cóncavo hacia abajo..... $f \cap$



Concavidad hacia arriba



Concavidad hacia abajo

6.11 Teorema (Criterio de la segunda derivada para concavidad)

- i) $f''(x) > 0 \forall x \in I$ entonces el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en I .
 ii) $f''(x) < 0 \forall x \in I$ entonces el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en I .

6.12 Teorema

Si $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión y f' es continua en x_0 entonces se tiene una de las siguientes posibilidades:

- i) $f''(x_0) = 0$
 ii) $f''(x_0)$ no existe.

6.13 Teorema (Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos)

Sea f una función tal que f'' es continua en un intervalo abierto I que contiene a x_0 y que $f'(x_0) = 0$.

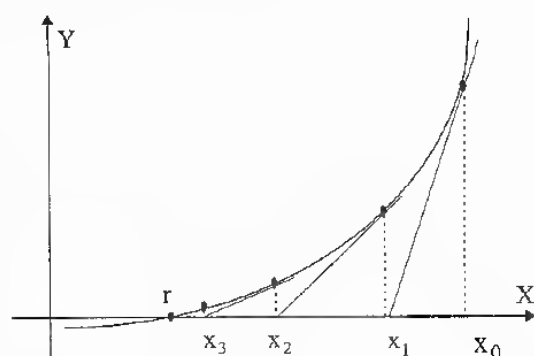
- i) Si $f''(x_0) < 0$ entonces $f(x_0)$ es un valor máximo.
 ii) Si $f''(x_0) > 0$ entonces $f(x_0)$ es un valor mínimo.

6.14 Método de Newton

Dada una función $f(x)$ se quiere hallar c tal que $f(c) = 0$, c recibe el nombre de raíz de la ecuación $f(x)=0$, éste es un problema que se confronta casi a diario y se hace algo difícil de resolver cuando aparecen funciones trigonométricas y/o transcendentales. Ya tuvimos oportunidad de ensayar la búsqueda de raíces aproximadas usando el método de bisección que es totalmente eficiente, en el sentido de que el valor obtenido siempre es una aproximación del verdadero valor de la raíz, sin embargo, es muy lento, se necesita una buena cantidad de iteraciones para obtener ese valor aproximado.

Con el método de Newton se gana una extraordinaria rapidez, pero se pierde la eficiencia del método de bisección, es decir, el valor que se obtiene, por veces, es una raíz pero no la esperada; o bien a veces el método no converge; sin embargo, éste es el método que usan la mayoría de las calculadoras, pues, combina rapidez con un alto grado de eficiencia siempre que se tenga en cuenta algunos detalles. Este método también se conoce como el método de las tangentes, debido a su procedimiento geométrico:

Localizamos un intervalo $I=[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, siendo f continua en I , sabemos que por el teorema de los valores intermedios existe $r \in (a, b)$ tal que $f(r)=0$. Para obtener una aproximación de la raíz r , fijamos un **valor inicial** x_0 .



La ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

y su intersección con el eje OX es:

(Primera aproximación).

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{si } f'(x_0) \neq 0.$$

Utilizamos esta primera aproximación para deducir una segunda, repitiendo el proceso geométrico anterior, la ecuación de la tangente por el punto

$(x_1, f(x_1))$ es,

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1),$$

y su intersección con el eje OX es:

$$\text{(Segunda aproximación)} \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \text{si } f'(x_1) \neq 0.$$

Utilizamos esta segunda para obtener una tercera con el mismo procedimiento geométrico:

$$\text{(Tercera aproximación)} \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad \text{si } f'(x_2) \neq 0.$$

Podemos observar que esta técnica se puede repetir indefinidamente, y la fórmula de x_{n+1} en término de la anterior x_n es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{siempre que } f'(x_n) \neq 0$$

llamada fórmula de recurrencia.

Con esto se genera una sucesión de valores aproximados $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$. En textos especializados se demuestra que esta sucesión converge a r si $\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$ en un intervalo abierto alrededor de la raíz, para cualquier valor inicial x_0 en dicho intervalo.

De la fórmula de recurrencia, podemos observar algunos detalles que debemos tener en cuenta para obtener los resultados deseados:

$f'(x_n)$ no solamente debe ser distinto de cero, sino que, además, los valores de $f'(x_n)$ no pueden ser muy cercanos a cero, ya que de serlo la siguiente aproximación x_{n+1} se aleja demasiado de la raíz buscada e incluso puede salirse del dominio de la función.

En resumen los pasos a seguir son:

- Usando el teorema de los valores intermedios se "localiza" un intervalo que contenga la raíz. De ser posible que $f'(x) \neq 0$ en dicho intervalo.
- Se toma como valor inicial x_0 cualquier punto de ese intervalo y lo más cercano posible a r .
- Se aplica la fórmula de recurrencia $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Si $f'(x_n) = 0$ para algún valor de n se elige otro x_0 .
- El proceso de recurrencia se para cuando $|x_{n+1} - x_n| < \text{error}$.

6.15 Asintotas al gráfico de una función

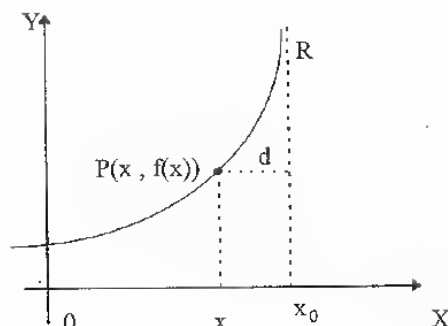
Consideremos un punto $P(x, f(x))$ sobre el gráfico de la función f . Si la distancia de P a una recta R , tiende a cero, cuando $x \rightarrow x_0$ o bien cuando $x \rightarrow \pm\infty$, diremos que la recta R es una asíntota al gráfico de f . Se tienen dos posibilidades:

Asíntota vertical:

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ entonces la distancia de P a la recta R de ecuación $x = x_0$ es tal que:

$$d = d(P, R) = |x - x_0| \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow x_0.$$

Por lo tanto, la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical al gráfico de f. Es válido el mismo resultado en el caso de límites laterales.

Asíntota oblicua:

Si existen los límites

$$(1) \quad m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$(2) \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$; por lo tanto siendo

$P(x, f(x))$ y $A(x, mx + b)$ se tendrá:

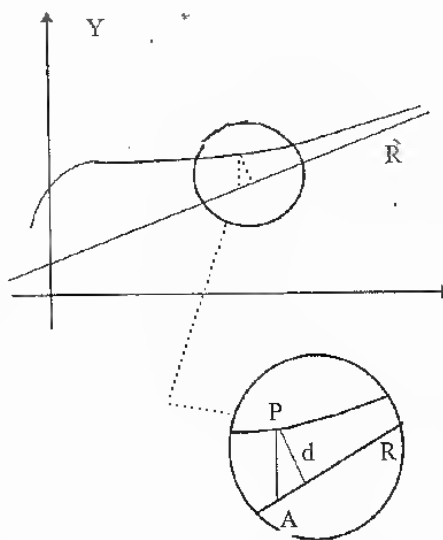
$$d(P, A) = |f(x) - (mx + b)| \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \pm\infty$$

y otro tanto ocurre con $d = d(P, R)$, luego la recta R de ecuación

$$y = mx + b$$

es una asíntota al gráfico de f.

Si en (1) y (2) se hacen los cálculos con $x \rightarrow -\infty$ se estará calculando la asíntota hacia la izquierda, en cambio, si los cálculos son con $x \rightarrow +\infty$ se estará evaluando la existencia de asíntota hacia la derecha. Además, tanto para la derecha como para la izquierda, si uno de los límites (1) o (2) no existe, la gráfica no tiene asíntota hacia el lado respectivo.

**6.16 Trazado de curvas**

Para el correcto trazado de la gráfica de una función $y = f(x)$, se deben tener en cuenta los siguientes datos:

a) Que se obtienen de la función $y = f(x)$:

- Dominio. ✓
- Continuidad. ✓
- Cortes con los ejes. Signo de f. ✓
- Paridad o imparidad (simetrías). Intervalo de estudio. ✓
- Asíntotas. ✓

b) Estudio de la 1ª derivada:

- Números críticos. ✓
- Signo de f' . Intervalos de crecimiento y decrecimiento. ✓
- Valores máximos y mínimos (criterio de la 1ª derivada). ✓

c) Estudio de la 2ª derivada:

- Abscisa de los posibles puntos de inflexión. ✓

Intervalos de concavidad. ✓

Máximos y mínimos (criterio de la 2^{da} derivada). ✓

Puntos de inflexión. ✓

6.17 Problemas de optimización

Con este nombre se conocen todos aquellos problemas que conducen a la búsqueda de máximos o mínimos (valores extremos) de alguna magnitud sujeta, por lo general, a diversas variables con determinados rangos de variación para éstas últimas.

Para resolver estos problemas es conveniente seguir algunos pasos:

- 1) Hacer un dibujo ilustrativo e indicar en él la magnitud por optimizar y las diferentes variables que intervienen.
- 2) Escribir la relación algebraica (función) de la magnitud por optimizar en términos de esas variables.
- 3) Escribir las ecuaciones o hechos teóricos conocidos que relacionan las diferentes variables del problema.
- 4) Reescribir la función, dependiendo de **una sola variable**, e indicar el **dominio físico** del problema. En general el dominio físico del problema no coincide con el dominio de la función vista como expresión algebraica.
- 5) Determinar los números críticos y usar el criterio de la 1^{ra} derivada o 2^{da} derivada, según sea más conveniente.

6.18 Diferenciales

Para la derivada hemos usado entre otras las siguientes notaciones: $\frac{df}{dx}(x_0)$ (notación de Leibniz) y $f'(x_0)$ (notación de función) donde la primera de ellas no representa un cociente sino, como se dijo, una notación para $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, así como también lo es la segunda. Sin embargo, si pensamos la primera como un cociente de la igualdad $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$ surge $df(x_0) = f'(x_0)dx$, que da origen a la siguiente definición:

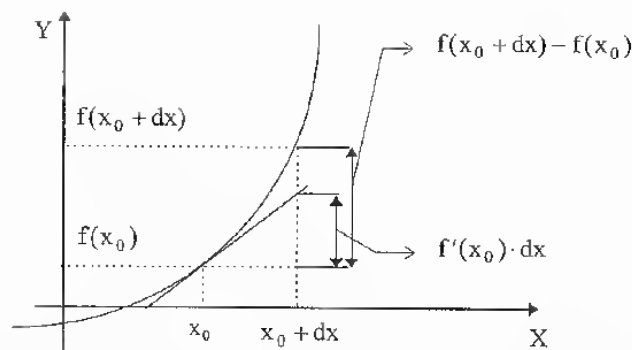
6.18.1 Definición

Se define la diferencial de f en x_0 ($df(x_0)$) relativa al incremento dx como $df(x_0) = f'(x_0)dx$, donde dx se conoce como el diferencial de la variable independiente.

Como sabemos, la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ viene dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Sustituyendo en esta última $x = x_0 + dx$ obtenemos como ordenada $y = f(x_0) + f'(x_0)dx$, es decir, el punto $(x_0 + dx, f(x_0) + f'(x_0)dx)$ está sobre la recta tangente, la diferencia de ordenadas entre el punto anterior y el punto de tangencia $(x_0, f(x_0))$ es la diferencial $f'(x_0)dx$.



De la figura adjunta podemos observar que si dx es “pequeño” la diferencia $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ es aproximadamente igual a la diferencial $f'(x_0)dx$:

$$(6.18.1) \quad f(x_0 + dx) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx \quad (\Delta f \approx df)$$

de donde

$$(6.18.1) \quad f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$$

o bien en términos de x

$$(6.18.2) \quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

para x “suficientemente cercano a x_0 ”.

Todo estudiante universitario desarrolla un sentido práctico natural, muy particular e intrínseco en el estudiantado de ingeniería, por lo cual no es extraño se estén preguntando, ¿cuál es la utilidad de estas aproximaciones?

1) Cálculo de valores aproximados:

Si $f(x_0)$ es un valor conocido, se puede utilizar (6.18.1) para calcular el valor aproximado de $f(x_0 + dx)$ que será tanto mejor como “pequeño” sea dx . Ver ejercicio resuelto (6.42). Esta técnica fue usada profusamente a partir del desarrollo del Cálculo para construir tablas de funciones que aún se pueden encontrar en manuales [4], así como en anexos de libros de Cálculo, sin embargo, con el desarrollo tecnológico ha perdido vigencia, hoy día con una calculadora, evaluamos rápidamente y con los dígitos que se requieran.

Otra aplicación de la diferencial es en la *estimación de la propagación de errores*:

Cuando se realiza una medición se comete un error de lectura que se puede, en general, estimar. ¿Cuál es la influencia de este error en los cálculos posteriores? La diferencial es una herramienta sencilla que permite estimar el error en el cálculo final. Si x_0 es la cantidad medida y Δx es el error en la medida ($\Delta x = dx$)

entonces la medida exacta es $x_0 + \Delta x$. En cuanto al cálculo con la medida x_0 tendremos:

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{Error final}} = \underbrace{f(x_0 + \Delta x)}_{\text{valor exacto}} - \underbrace{f(x_0)}_{\text{valor aproximado}}$$

Como $\Delta f \approx df$, en términos de la diferencial definimos:

Error: $df(x_0) = f'(x_0)dx$

Error relativo: $\frac{df(x_0)}{f(x_0)}$

Error porcentual: $\frac{df(x_0)}{f(x_0)} \times 100$

2) Aproximación lineal

En casi todas las ciencias, en particular ingeniería, se utiliza reemplazar en problemas de cálculo, por ejemplo en el estudio de comportamiento de funciones, una función complicada por otra más sencilla siempre que se pueda garantizar una buena precisión en los cálculos y estimar los errores producidos.

La ecuación:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

se llama aproximación lineal de f para x cercano a x_0 . Es decir, los valores de $f(x)$ en un intervalo alrededor de x_0 se pueden aproximar por los valores de $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (recta tangente).

Sin embargo la deducción hecha, en la forma anterior, para la aproximación de $f(x)$ por la recta tangente, no proporciona información de cómo cuantificar el error que se comete. De hecho, cuando la curva (gráfico de la función) presenta una “curvatura” muy pronunciada observamos que la diferencia:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

puede ser muy grande aunque la distancia $|x - x_0|$ sea “pequeña”. Este inconveniente se solventará con el desarrollo de Taylor alrededor de x_0 al cual también se le da el nombre de Teorema del Valor Medio Generalizado.

EJERCICIOS RESUELTOS

Aplicaciones Geométricas

6.1 Halle la ecuación de la recta tangente y normal al gráfico de la función $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 5}$ en el punto (3,2).

$$f'(x) = \frac{3x^2}{5\sqrt[5]{(x^3 + 5)^4}}; \text{ en el punto dado se tiene } f'(3) = \frac{27}{80}.$$

$$\text{Ecuación de la tangente: } y - 2 = \frac{27}{80}(x - 3). \quad \text{Ecuación de la normal: } y - 2 = -\frac{80}{27}(x - 3).$$



6.2 ¿En qué punto del gráfico de $y = 2^x$ la tangente es paralela a la recta de ecuación $-8x + 2y + 3 = 0$?

La pendiente de la recta dada es 4; por lo tanto, se quiere conocer en qué punto del gráfico la derivada es igual a 4:

$$f'(x_0) = 2^{x_0} \ln 2 = 4 \Rightarrow x_0 = \log_2\left(\frac{4}{\ln 2}\right) = 2 - \log_2(\ln 2); x_0 \text{ es la abscisa del punto y su ordenada es}$$

$$f(x_0) = \frac{4}{\ln 2}.$$



6.3 Encontrar la ecuación de la tangente al gráfico de $y = \ln x + 1$ que pasa por (0,3)

Siendo $x = a$ la abscisa del punto de tangencia, la pendiente de la tangente es $m = f'(a) = \frac{1}{a}$, y su ecuación es $y - 3 = \frac{1}{a}x$. Sustituyendo el punto de tangencia $(a, f(a)) = (a, \ln a + 1)$ en la ecuación de la recta se tiene $\ln a + 1 - 3 = 1$, de donde $a = e^3$. La ecuación de la tangente es, por lo tanto, $y - 3 = \frac{1}{e^3}x$.



6.4 Para la curva $x = e^{-t} \cos 2t$, $y = e^{-2t} \sin 2t$, encontrar la abscisa de los puntos donde la recta tangente es horizontal.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2e^{-2t} \sin 2t + 2e^{-2t} \cos 2t}{-e^{-t} \cos 2t - 2e^{-t} \sin 2t} = 0 \text{ si y solo si } 2e^{-2t}(-\sin 2t + \cos 2t) = 0 \Leftrightarrow \sin 2t = \cos 2t \text{ cuyas}$$

$$\text{soluciones son: } 2t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{8} + k\pi$$

$$2t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{8} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

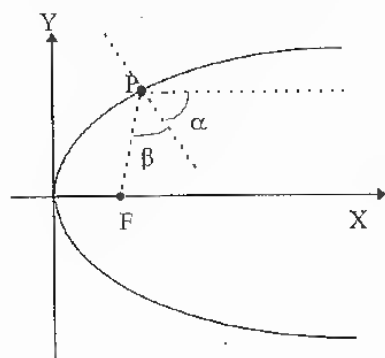
Por lo tanto, en los puntos de abscisa $x = e^{-\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right)} \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x = -e^{-\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right)} \frac{\sqrt{2}}{2}$ la recta tangente es horizontal.



6.5 Propiedad de reflexión de la parábola:

Demostrar que la recta normal a la parábola en (x_1, y_1) forma ángulos iguales con las rectas que pasan por (x_1, y_1) y que una es paralela al eje principal de la parábola, y la otra pasa por el foco.

Sin pérdida de generalidad, se puede considerar la parábola de ecuación $y^2 = 4px$ y un punto $P(x_1, y_1)$ arbitrario sobre ella.



La pendiente de la recta paralela a su eje principal tiene pendiente $m_1 = 0$.

La pendiente de la recta que pasa por $P(x_1, y_1)$ y por el foco $F(p, 0)$ es $m_3 = \frac{y_1}{x_1 - p}$.

Usando derivación implícita tenemos $2yy' = 4p$, de donde $y' = \frac{2p}{y}$, luego la pendiente de

la normal en P es $m_2 = -\frac{y_1}{2p}$. Por otro lado,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = -\frac{y_1}{2p} \quad \text{con } 0 \leq \beta < \pi \quad y$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_3 m_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1 - p} - \frac{y_1}{2p}}{1 - \frac{y_1}{x_1 - p} \cdot \frac{y_1}{2p}} = \frac{2py_1 + y_1(x_1 - p)}{2p(x_1 - p) - x_1^2} = \frac{y_1(p + x_1)}{-2p(x_1 + p)} = -\frac{y_1}{2p} \quad \text{con } 0 \leq \alpha < \pi. \text{ Por lo tanto}$$

$$\alpha = \beta.$$

Nota:

Desde el punto de vista físico esta propiedad geométrica se traduce en que si un rayo de luz sale del foco, incidirá sobre la parábola y se reflejará paralelamente al eje principal, y viceversa. Lo mismo ocurrirá con cualquier otro tipo de emisión que se propague en línea recta. En esta propiedad de la parábola se basa la construcción de los faros de automóviles y, en general, todos los reflectores parabólicos.



Aplicaciones Físicas

6.6 La posición de una partícula, con movimiento rectilíneo, en función del tiempo está dada por la ecuación $P(t) = t^2 - 4\ln(t+1)$ $t \geq 0$, encontrar:

1) La velocidad y la aceleración instantáneas.

Velocidad: $P'(t) = 2t - \frac{4}{t+1}$
 Aceleración: $P''(t) = 2 + \frac{4}{(t+1)^2}$

2) Describir el movimiento de la partícula.

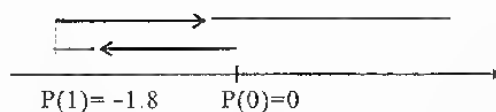
Se sabe (Teorema 6.8) que si $P'(t) > 0$ la partícula se mueve hacia la derecha y si $P'(t) < 0$ el movimiento es hacia la izquierda.

$P'(t) = 2t - \frac{4}{t+1} = 0$ si $t^2 + t - 2 = 0$ cuyas soluciones son:

$t = -2$, que no está en el intervalo de trabajo, y $t = 1$.

Intervalo	0	1	$+\infty$
Número	0.5	2	
Signo de P'	$P'(0.5) < 0$	$P'(2) > 0$	
Dirección del movimiento	Hacia la izquierda	Hacia la derecha	

Descripción gráfica del movimiento:



6.7 La función $S(t) = -5t^2 + 10t + 5$ representa la posición en metros sobre el suelo, de una pelota que es lanzada desde lo alto de un muro para un instante t medido en segundos.

a) Calcular la altura del muro.

La altura del muro se obtiene calculando $S(0)$: $S(0) = 5$.

b) Calcular la velocidad inicial con que se lanza la pelota.

La velocidad de la pelota en cualquier instante de tiempo es $S'(t) = -10t + 10$. Para $t = 0$ obtenemos la velocidad inicial: $S'(0) = 10$.

c) Calcular la aceleración de la pelota en cualquier instante t .

La aceleración de la pelota en cualquier instante t es $S''(t) = -10$.

d) Calcular la altura máxima que alcanza la pelota.

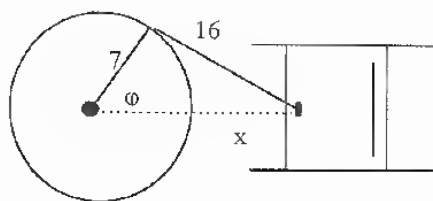
La pelota alcanza su máxima altura cuando la velocidad se anula: $S'(t) = -10t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Luego la altura máxima es $S(1) = 10$.



6.8 El brazo de la figura tiene 16cms y la biela de 7cms gira en sentido contrario a las agujas del reloj a 3.000 revoluciones por minuto. Hallar la velocidad del pistón cuando $\varphi = 0, \pi, \frac{\pi}{2}$.

De la velocidad de rotación de la biela se tiene que $\frac{d\varphi}{dt} = 3.000(2\pi) \text{ rad/min}$

Por la ley del coseno se tiene la siguiente relación:



$$(16)^2 = 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \cdot \cos \varphi,$$

donde x es la posición instantánea del pistón.

Se deriva implícitamente respecto de t ,

$$0 = 2x \frac{dx}{dt} - 14 \frac{dx}{dt} \cos \varphi - 14x(-\sin \varphi) \frac{d\varphi}{dt},$$

de donde se despeja la velocidad instantánea del pistón:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{7x \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}}{(7 \cos \varphi - x)}.$$

Para $\varphi = 0$, se obtiene que la posición del pistón es $x=23$; sustituyendo todos los datos en la velocidad instantánea se obtiene, como es de esperar, que $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\varphi=0} = 0$.

Para $\varphi = \pi$, la posición del pistón es $x = 9$, y también como se espera se obtiene $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\varphi=\pi} = 0$.

Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la posición del pistón es $x = \sqrt{207}$ y $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -42.000\pi \text{ cms/min}$. El signo menos indica que en ese

instante el pistón se mueve hacia la izquierda, lo que se puede deducir de la figura.

¿ Podría Ud. decir cuál es la velocidad instantánea del pistón para $\varphi = \frac{3\pi}{2}$?



Teoremas de Rolle y Valor Medio

6.9 Tras comprobar que la función satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo indicado, hallar los valores que puede tomar c .

a) $f(x) = x - \sin x$ $I = [-\pi, \pi]$

f es continua en $[-\pi, \pi]$, derivable en $(-\pi, \pi)$ y su derivada es $f'(x) = 1 - \cos x$. Para hallar los valores de c se debe resolver la ecuación $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, que viene siendo $1 - \cos c = 1$ cuyas soluciones en el intervalo dado son $c = \pm \frac{\pi}{2}$.



b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $I = [0, 1]$

La función derivada de f es $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$. f es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow -\frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = -1 \Leftrightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Como } c \text{ debe estar en el intervalo dado se tendrá } c = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



c) $f(x) = |x|$ $I = [-1, 1]$

La función es continua en $[-1, 1]$, pero no es derivable en $(-1, 1)$ pues $f'(0)$ no existe. El teorema no es aplicable.

Por lo demás se puede ver que $f(-1)=f(1)=1$, caso del Teorema de Rolle, y $f'(c) \neq 0$ cualquiera que sea c en $(-1, 1)$.



6.10 Usando el teorema del valor medio demuestre la siguiente propiedad funcional:

$$x > 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x < x.$$

Sea $f(x) = \operatorname{arctg} x$; es aplicable el teorema del valor medio en el intervalo $[0, x]$ para cualquier x positivo pues f es continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$, por lo tanto, existe un c tal que $0 < c < x$ para el cuál

$$\frac{1}{1+c^2} = f'(c) = \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0}{x - 0} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

Si $0 < c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2 \Rightarrow 1 < 1+c^2 < 1+x^2 \Rightarrow 1 > \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$, sustituyendo la igualdad anterior resulta:

$$1 > \frac{\operatorname{arctg} x}{x} > \frac{1}{1+x^2},$$

multiplicando la desigualdad por x , que es positivo, se tiene: $\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x < x$.



6.11 Demostrar que la ecuación $6x^5 + 13x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

Sea $F(x) = 6x^5 + 13x + 1$, la cuál es una función continua en \mathbb{R} . Una raíz de la ecuación será un número x_0 tal que $F(x_0) = 0$, veamos que tal ecuación tiene solución en \mathbb{R} :

$F(0) = 1$ y $F(-1) = -18$, luego por el teorema de los valores intermedios existe $x_0 \in (-1, 0)$ tal que $F(x_0) = 0$. Veamos ahora que ésta es única:

Supongamos que además de x_0 existe otra raíz, llamémosla x_1 y que, sin pérdida de generalidad, ella es tal que $x_1 > x_0$, luego por el teorema de Rolle existirá $c \in (x_0, x_1)$ donde $F'(c) = 0$, lo cuál es una contradicción, pues, $F'(x) = 30x^4 + 13 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. La contradicción, obviamente, proviene de suponer que la ecuación tiene dos raíces en \mathbb{R} . Si $x_1 < x_0$ el razonamiento es similar.



Regla de L'Hôpital

6.12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\cos x - x - 1}$.

El límite presenta una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\cos x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)'}{(\cos x - x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin x - 1} = -2.$$



6.13 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}$

El límite presenta una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\csc x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cdot \operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

En el penúltimo paso pudiéramos haber utilizado de nuevo L'Hôpital en vez del límite notable.



6.14 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$

El límite presenta una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; como veremos hará falta aplicar L'Hôpital varias veces para "resolver la indeterminación":

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3 \cdot 2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(3 \cdot 2 \cdot x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3 \cdot 2} = +\infty.$$



NOTA:

La regla de L'Hôpital sólo es aplicable a indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$. Luego de presentarse otro tipo de indeterminaciones se deben reducir éstas, mediante alguna manipulación algebraica, a la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

6.15 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2} \sec x \right)$

Se tiene una indeterminación de la forma $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2} \sec x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{-\operatorname{sen} x} = -1$$



6.16.- $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

Se tiene una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$



6.17 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

Indeterminación del tipo 0^0 . Se puede escribir $(\operatorname{sen} x)^x = e^{x \ln(\operatorname{sen} x)}$ y,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{ctg} x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0.$$

Luego tenemos $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x)} = e^0 = 1.$



6.18 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\operatorname{Ln} x}$

Indeterminación de la forma 1^∞ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Ln} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\operatorname{Ln} x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{(\operatorname{Ln} x)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\operatorname{Ln} x)^2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \operatorname{Ln} x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \operatorname{Ln} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\operatorname{Ln} x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Ln} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1.$



Criterio de la primera derivada para crecimiento y decrecimiento

6.19 Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2},$

$f'(x) = 3x^2 - x = x(3x - 1),$ es continua en $\mathbb{R}.$

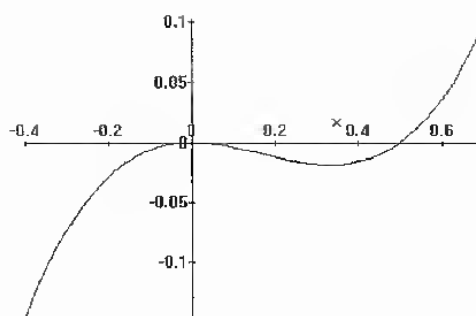
Para hallar los intervalos donde f' es positiva y donde es negativa se puede proceder de la siguiente forma:

-Se calculan las soluciones de $f'(x) = 0$, en nuestro caso son $x = 0$, $x = \frac{1}{3}.$

-Estas raíces, junto con los puntos donde no esté definida f y f' , dividen la recta real en un número determinado de intervalos, en cada uno de los cuales f' es continua y mantiene su signo, por lo tanto, para conocer el signo de f' en uno de esos intervalos es suficiente calcular el signo que tiene en un número cualquiera del intervalo:

Intervalo	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Número		$x = -1$	$x = \frac{1}{4}$	$x = 1$
Signo de f'		$f'(-1) > 0$	$f'(\frac{1}{4}) < 0$	$f'(1) > 0$
Crecimiento		$f \uparrow$	$f \downarrow$	$f \uparrow$

La función tiene el siguiente gráfico:



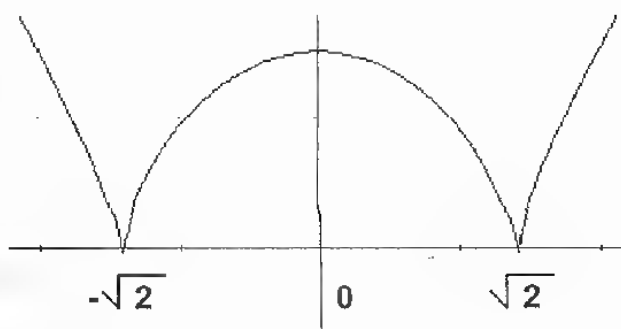
b) $f(x) = (x^2 - 2)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 2)^{-1/3} \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 2}},$$

tenemos entonces que el dominio de f es \mathbb{R} y f' no está definida en $\pm\sqrt{2}$, por otro lado la solución de $f'(x) = 0$ es $x=0$. Procedemos ahora como en el ejercicio anterior:

Intervalo	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
Número		$x=-2$	$x=-1$	$x=1$	$x=2$
Signo de f'		$f'(-2) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(2) > 0$
Crecimiento		$f \downarrow$	$f \uparrow$	$f \downarrow$	$f \uparrow$

El gráfico de f es el siguiente:



Criterio de la segunda derivada

6.20 a) Determinar la constante a para que la función

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$$

tenga:

- Un mínimo relativo en $x = 2$.
- Un mínimo relativo en $x = -3$.
- Un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Demostrar que la función no puede tener un máximo relativo para ningún valor de a .

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2}$ y $f''(x) = 2 + \frac{2a}{x^3}$. Tanto la primera como la segunda derivadas están definidas en cada punto de $D(f)$. Para que f alcance un valor extremo (máximo o mínimo) en x_0 , este debe ser un número crítico de f :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - a = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

i) $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}} = 2 \Leftrightarrow a = 16$; con este valor de a se tiene $f''(2) > 0$, por lo tanto $f(2) = 12$ es un valor mínimo.

ii) $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}} = -3 \Leftrightarrow a = -54$; con este valor de a se tiene $f''(-3) > 0$, por lo tanto, $f(-3) = 27$ es un valor mínimo.

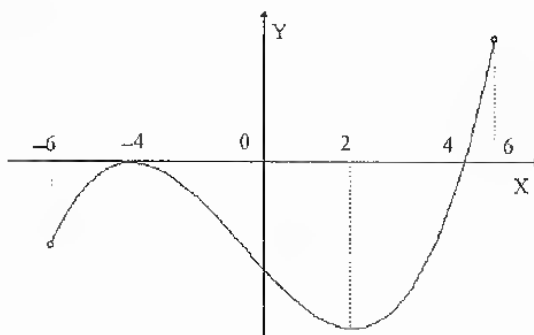
iii) Para que el punto $(1, f(1))$ sea un punto de inflexión es necesario que $f''(1) = 0$:

$f''(x) = 2 + \frac{2a}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-a}$ y a su vez $x = \sqrt[3]{-a} = 1 \Leftrightarrow a = -1$. Para este valor de a se tiene $f'' < 0$ a la izquierda de 1 y $f'' > 0$ a la derecha de 1; en el punto $(1, f(1))$ hay un cambio de concavidad.

b) $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ y $f''\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right) = 6 > 0$ para cualquier valor de a , por lo tanto, f no alcanza valor máximo para ningún valor de a .



6.21 Dada la siguiente gráfica de $f'(x)$:



y las condiciones $D(f) = [-6, 6]$, $R(f) = [-5, 4]$, $f(-6) = 4$ y $f(6) = -3$.

a) Dar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y números críticos de f .

b) Dar intervalos de concavidad y puntos de inflexión de f .

c) Construir un gráfico de f en forma aproximada.

a) $f' < 0$ en el intervalo $(-6, -4)$ y en $(-4, 4)$ luego en estos intervalos $f \downarrow$.

$f' = 0$ en $x = -4$ (número crítico), sin embargo f es decreciente tanto a la izquierda como a la derecha de -4 , luego f no alcanza valor extremo en este número crítico.

$f' > 0$ en el intervalo $(4, 6)$, por lo tanto $f \uparrow$.

$f' = 0$ en $x = 4$ (número crítico); f es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha por lo cual f alcanza un valor mínimo en $x = 4$.

b) En el intervalo $(-6, -4)$ f' es creciente, por lo tanto, su derivada es positiva, es decir, $f'' > 0$, luego $f \cup$ en dicho intervalo.

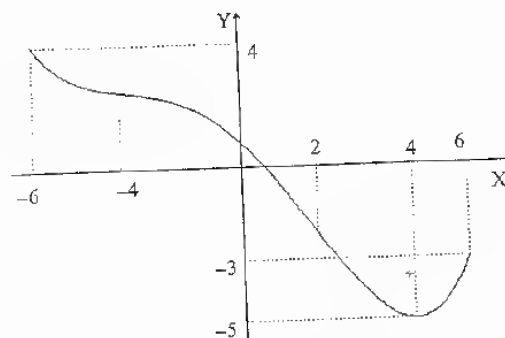
En el intervalo $(-4, 2)$ f' es decreciente, por lo tanto, su derivada es negativa, es decir, $f'' < 0$, luego $f \cap$ en dicho intervalo.

$f'' = 0$ en $x = -4$ y el gráfico de f cambia de concavidad, luego el punto $(-4, f(-4))$ es un punto de inflexión.

En forma similar, se concluye que $f'' > 0$ en el intervalo $(2, 6)$ por lo tanto $f \cup$.

$f'' = 0$ en $x = 2$ y el gráfico de f cambia de concavidad, luego el punto $(2, f(2))$ es un punto de inflexión.

c) Gráfico aproximado:



6.22 x_0 puede ser un número crítico de f sin que f tenga un máximo o mínimo en x_0 .

 $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$ y $f'(0) = 0$, por lo tanto, x_0 es un número crítico de f ; sin embargo f no tiene máximo ni mínimo en $x_0 = 0$. En efecto, si $x < 0$ $f(0) > f(x)$ y si $x > 0$ $f(0) < f(x)$.



Trazado de Curvas

6.23 $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ (La función crótica)

 El dominio de f es \mathbb{R} , donde además es continua.
 Es una función par, en efecto:

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x),$$

por lo cual es suficiente construir su gráfico en el intervalo $[0, +\infty)$ y luego completarlo usando el hecho de que es simétrico respecto del eje OY.

Cortes con los ejes

Con el eje OX: $f(x) = 0$ tiene como solución $x=0$, y $f(0) = 0$.

Signo de f : $\forall x > 0$ $f(x) > 0$ por ser un producto de funciones positivas.

Asíntotas:

No hay asíntotas verticales puesto que es una función continua en \mathbb{R} .

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0,$$

luego $y=0$ es una asíntota horizontal al gráfico de la función.

Estudio de la 1ª derivada

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} (-2x) = 2xe^{-x^2} (1 - x^2),$$

el dominio de f' es \mathbb{R} . Los números críticos son entonces las soluciones de $f'(x) = 2xe^{-x^2}(1-x^2)=0$, que en el intervalo $[0, +\infty)$ son $x=0$ y $x=1$.

Intervalo	0	1	$+\infty$
Número		0.5	3
Signo de f'		$f'(0.5)>0$	$f'(3)<0$
Crecimiento		$f \uparrow$	$f \downarrow$

Por lo tanto, en $x=0$ f alcanza un valor mínimo, $f(0)=0$, y en $x=1$ f alcanza un valor máximo, $f(1)=\frac{1}{e}$.

Estudio de la 2ª derivada

$$f''(x) = 2e^{-x^2} + 2xe^{-x^2}(-2x) - 6x^2e^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}(2x^4 - 5x^2 + 1),$$

el dominio de f'' es \mathbb{R} y las soluciones de $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^4 - 5x^2 + 1) = 0$ son las soluciones de $2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$:

hacemos $z = x^2$ para obtener la ecuación $2z^2 - 5z + 1 = 0$ que tiene como soluciones

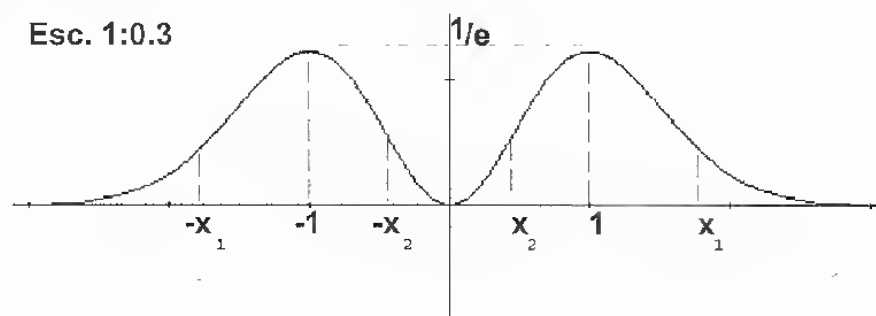
$$z = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \quad \text{y} \quad z = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{que son ambas positivas, sustituyendo obtenemos } x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5 - \sqrt{17}} \quad \text{y}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5 + \sqrt{17}} \quad \text{que son las soluciones positivas de la ecuación de 4º grado.}$$

Intervalo	0	x_2	x_1	$+\infty$
Número		1/4	1	10
Signo de f''		$f''(1/4)>0$	$f''(1)<0$	$f''(10)>0$
Concavidad		$f \cup$	$f \cap$	$f \cup$

Los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ son puntos de inflexión porque en ellos hay cambio de concavidad.

Se traza el gráfico correspondiente al intervalo $[0, +\infty)$ y luego se usa la simetría respecto del eje OY para completarlo hacia la izquierda.



6.24 $f(x) = \frac{x^5}{(x-1)^4}$

El dominio de f es $\mathbb{R} - \{1\}$, donde es continua. No es una función par ni impar, tampoco es periódica.

Cortes con los ejes:

Con el eje OX: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^5=0 \Leftrightarrow x=0$ y $f(0)=0$. El origen también es el corte con el eje OY.

Signo de f :

El denominador es positivo. $x^5>0$ si $x>0$ y $x^5<0$ si $x<0$, por lo tanto, $f(x)<0$ si $x<0$ y $f(x)>0$ si $x>0$.

Asintotas:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^5}{(x-1)^4} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^5}{(x-1)^4} = +\infty$, por lo tanto, la recta $x=1$ es una asíntota vertical al gráfico de f tanto por la derecha como por la izquierda de 1.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{(x-1)^4} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^5}{(x-1)^4} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4 - 6x^3 + 4x^2 + x}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1} = 4,$$

por lo tanto la recta de ecuación $y=x+4$ es una asíntota oblicua hacia la derecha. Si reemplazamos $+\infty$ por $-\infty$ en los límites anteriores obtenemos los mismos resultados, luego la recta anterior también es asíntota al gráfico de f hacia la izquierda.

Estudio de la 1ª derivada

$f'(x) = \frac{5x^4(x-1)^4 - x^5 \cdot 4(x-1)^3}{(x-1)^8} = \frac{x^4(x-5)}{(x-1)^5}$ cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$. Los números críticos son las soluciones de la ecuación $x^4(x-5)=0$, es decir, $x=0$ y $x=5$.

Intervalo	$-\infty$	0	1	5	$+\infty$
Número	-1	0.5	2	4	
Signo de f'	$f'(-) > 0$	$f'(0.5) > 0$	$f'(2) < 0$	$f'(4) > 0$	
Crecimiento	$f \uparrow$	$f \uparrow$	$f \downarrow$	$f \uparrow$	

Por lo tanto:

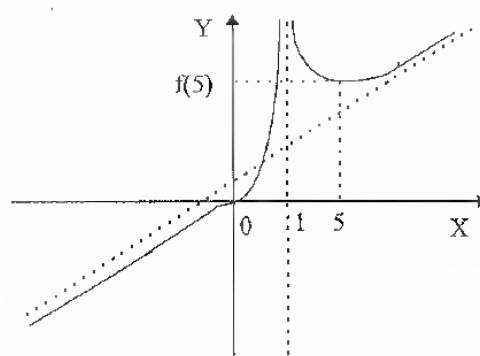
en $x=0$ no hay máximo ni mínimo; en $x=5$ f alcanza un valor mínimo: $f(5) = \frac{3125}{256} \approx 12.2$.

Estudio de la 2ª derivada

$$f''(x) = \frac{(4x^3(x-5) + x^4)(x-1)^5 - x^4(x-5) \cdot 5(x-1)^4}{(x-1)^{10}} = \frac{20x^3}{(x-1)^6},$$

el dominio de f'' es $\mathbb{R} - \{1\}$; $f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3=0 \Leftrightarrow x=0$, que es la abscisa del posible punto de inflexión.

Para estudiar el signo de f'' se puede observar que el denominador es positivo, $20x^3 > 0$ si $x > 0$ y $20x^3 < 0$ si $x < 0$, luego $f''(x) > 0$ si $x > 0$ y $f''(x) < 0$ si $x < 0$. Por lo tanto, $f \cap$ en $(-\infty, 0)$ y $f \cup$ en $(0, +\infty)$ y, $(0, f(0))$ es un punto de inflexión del gráfico.



$$6.25 \quad f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+2)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{x}{(x+2)^2}}$$

El dominio de f es $\mathbb{R} - \{-2\}$, donde es continua. No es una función par, ni impar, tampoco es periódica.

Cortes con los ejes

$f(0)=0$, luego el punto $(0,0)$ es la intersección del gráfico con el eje OY.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x}{(x+2)^2}} = 0$ cuya solución es $x=0$, luego $(0, 0)$ también es una intersección del gráfico con el eje OX.

Signo de f

f se anula en $x=0$, por lo tanto, se estudia su signo en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, +\infty)$, en los cuales mantiene su signo por ser continua en cada uno de éstos.

Intervalo	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
Signo de f	$f(-3) = \sqrt[3]{-3} < 0$	$f(-1) < 0$	$f(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > 0$	

Asíntotas

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{x}{(x+2)^2}} = -\infty$, luego $x=-2$ es una asíntota vertical al gráfico de f , tanto por la derecha como por la izquierda.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{(x+2)^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2(x+2)^2}} = 0,$$

$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{(x+2)^2}} = 0$, por lo tanto, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal al gráfico de f , hacia la derecha e izquierda.

Estudio de la 1ª derivada

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+2)^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}\right)(x+2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(x+2)^2}} - \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt[3]{(x+2)^5}} = \frac{2-x}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(x+2)^5}}$$

f' no está definida en $x=0$, por lo que éste es un número crítico. Los otros números críticos provienen de la resolución de $f'(x)=0$ que en este caso tiene como solución $x=2$. La primera derivada es continua en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$ donde mantiene su signo:

Intervalo	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
Número	-3	-1	1	3	
Signo	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) > 0$	$f'(3) < 0$	
Crecimiento	$f \downarrow$	$f \uparrow$	$f \uparrow$	$f \downarrow$	

En $x=2$ f alcanza un valor máximo: $f(2)=0.5$.

Estudio de la 2ª derivada

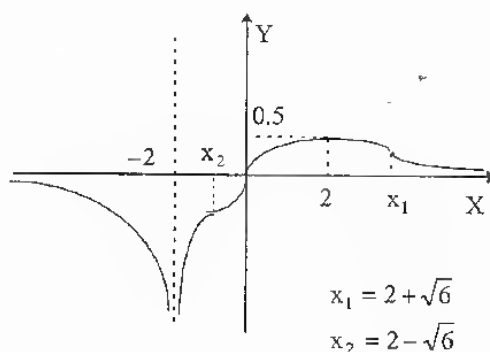
$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x+2)^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}(x+2)^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}(x+2)^{-\frac{5}{3}} + \frac{10}{9}x^{\frac{1}{3}}(x+2)^{-\frac{8}{3}} = \frac{4(x^2 - 4x - 2)}{9x^{\frac{5}{3}}(x+2)^{\frac{8}{3}}}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{6}$; se debe estudiar el signo de f'' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2 - \sqrt{6})$, $(2 - \sqrt{6}, 0)$, $(0, 2 + \sqrt{6})$, $(2 + \sqrt{6}, +\infty)$, donde mantiene su signo debido a la continuidad de ésta en cada intervalo:

Intervalo	$-\infty$	-2	$2 - \sqrt{6}$	0	$2 + \sqrt{6}$	$+\infty$
Número	-3	-1	-1/5	1	10	
Signo	$f''(-3) < 0$	$f''(-1) < 0$	$f''(-1/5) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(10) > 0$	
Concavidad	$f \cap$	$f \cap$	$f \cup$	$f \cap$	$f \cup$	

Tenemos los siguientes puntos de inflexión:

$(2 - \sqrt{6}, f(2 - \sqrt{6})) \approx (2 - \sqrt{6}, -0.572)$; $(0, f(0)) = (0, 0)$; $(2 + \sqrt{6}, f(2 + \sqrt{6})) \approx (2 + \sqrt{6}, 0.4747)$.



6.26 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$

El dominio de f es $\mathbb{R} - \{0\}$ donde es continua. La función es impar en efecto:

$$f(-x) = \frac{\ln|-x|}{-x} = -\frac{\ln|x|}{x} = -f(x) \quad \forall x \in D(f),$$

con lo cual es suficiente construir el gráfico en el intervalo $(0, +\infty)$ y luego completarlo usando la simetría respecto del origen, por lo tanto, se trabajará con la función

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{con } x \in (0, +\infty).$$

Cortes con los ejes

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ si } x = 1$$

Signo de f

Intervalo	0	1	$+\infty$
Número	1/e	e	
Signo	$f(1/e) < 0$	$f(e) > 0$	

Asíntotas

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, por lo tanto, la recta $x=0$ es una asíntota vertical.

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ y $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, por lo tanto, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal al gráfico de f .

Estudio de la 1ª derivada

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ definida en el intervalo $(0, +\infty)$ donde es continua. Los números críticos provienen de la resolución de $f'(x)=0$, que es equivalente a resolver $1 - \ln x = 0$, cuya solución es $x=e$. La derivada es continua en los intervalos $(0, e)$ y $(e, +\infty)$ donde mantiene su signo:

Intervalo	0	e	$+\infty$
Número	1	e^2	
Signo	$f'(1) > 0$	$f'(e^2) < 0$	
Crecimiento	$f \uparrow$	$f \downarrow$	

Se observa que f alcanza un valor máximo en $x=e$ donde $f(e) = 1/e$.

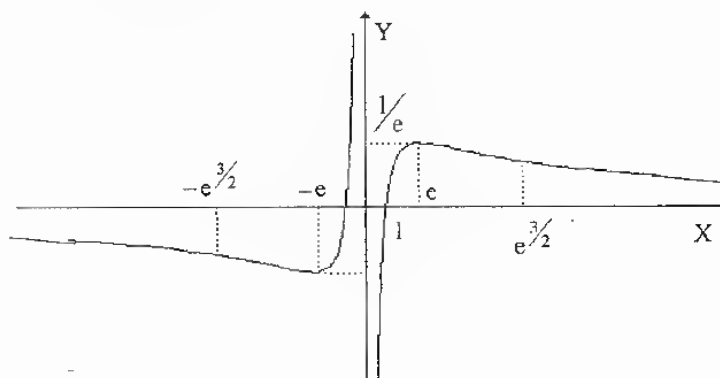
Estudio de la 2ª derivada

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2} - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}. \text{ Continua y definida en } (0, +\infty).$$

$f''(x)=0$ si y solo si $-3 + 2\ln x = 0$, cuya solución es $x = e^{\frac{3}{2}}$ abscisa del posible punto de inflexión.

Intervalo	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
Número	e	e^4	
Signo	$f''(e) < 0$	$f''(e^4)$	
Concavidad	$f \cap$	$f \cup$	

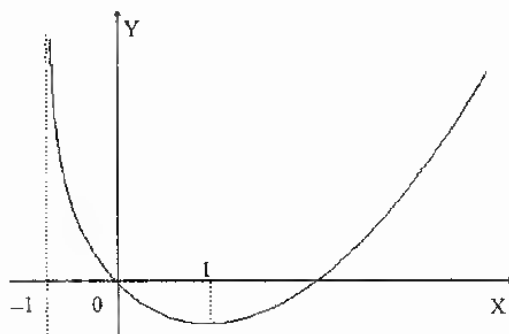
El punto $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$ es un punto de inflexión. Con estos datos trazamos el gráfico correspondiente al intervalo $(0, +\infty)$ y luego usamos el hecho de que es simétrico respecto del origen para completarlo al intervalo $(-\infty, 0)$.



Método de Newton

6.27 Encontrar las soluciones de $x^2 - 4\ln(x+1) = 0$

Observe que $x=0$ es una raíz y que haciendo $F(x) = x^2 - 4\ln(x+1)$ se tiene $F(2) \approx -0.39 < 0$ y $F(3) \approx 3.45 > 0$ luego existe $c \in (2,3)$ tal que $F(c)=0$ por ser F continua en $[2,3]$. El gráfico de F es el de la figura:



Tomamos como primera aproximación $x_0 = 3$:

n	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$
0	3	3.45482256	5	2.30903549
1	2.30903549	0.54501788	3.40925953	2.14917149
2	2.14917149	0.03038049	3.02816763	2.13913886
3	2.13913886	0.00012101	3.00404291	2.13909858
4	2.13909858	0.00000001	3.003946	2.13909858

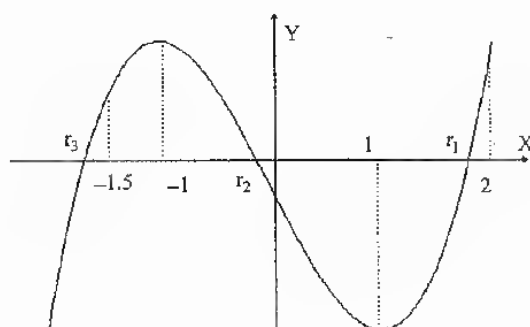
Los dos últimos valores aproximados que se consiguen coinciden en 8 cifras decimales. Tenemos así una raíz exacta $x=0$ y una aproximada $x \approx 2.13909858$. Supongamos que no se conoce el gráfico de la función F , ¿podría usted demostrar que no existen raíces adicionales?



6.28 Hallar las abscisas de los puntos intersección entre las siguientes curvas:

$$y = x^3, \quad y = 3x + 1.$$

Se debe resolver la ecuación $x^3 = 3x + 1$ o bien $F(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$. La gráfica de F es:



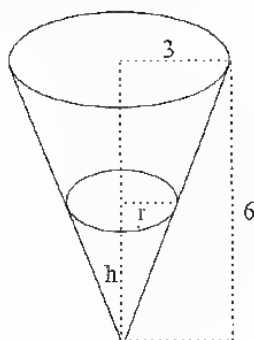
Se puede observar que el gráfico de F intercepta el eje OX en tres puntos r_1, r_2 y r_3 . Para calcularlos se darán como primeras aproximaciones 2, 0 y -1.5 que parecen estar "suficientemente cerca" de cada una de las respectivas raíces:

n	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$
0	2	1	9	1.88888889
1	1.88888889	0.07270234	7.70370372	1.87945157
2	1.87945157	0.00050387	7.59701461	1.87938525
3	1.87939525	0.00000006	7.59626675	1.87938524
<hr/>				
0	0	-1	-3	-0.33333333
1	-0.33333333	-0.03703705	-2.66666667	-0.34722222
2	-0.34722222	-0.00019559	-2.63831019	-0.34729635
3	-0.34729635	-0.00000001	-2.63815574	-0.34729635
<hr/>				
0	-1.5	0.125	3.75	-1.53333333
1	-1.53333333	-0.00503702	4.05333333	-1.53209064
2	-1.53209064	-0.00000712	4.04190519	-1.53208888
3	-1.53208888	-0.00000004	4.04188901	-1.53208887



Cambios relacionados

6.29' Una copa cónica de radio 3cms y altura 6cms se llena de líquido a razón de $1\text{cm}^3/\text{seg}$; ¿con qué rapidez sube el nivel del líquido cuando la copa se encuentra llena por la mitad de su altura?



Datos:

$$\frac{dV}{dt} = 1\text{cm}^3/\text{seg} \quad \text{y} \quad \text{volumen del cono de agua es:}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

El volumen viene dado en función de dos variables, por lo tanto, se quiere escribirlo en función de una sola variable. Por semejanza de triángulos se tiene:

$$\frac{r}{h} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}h.$$

Luego

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}h\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3 \quad \text{y} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{12}\pi 3h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Para $h = 3\text{cms}$ y $\frac{dV}{dt} = 1\text{cm}^3/\text{seg}$ tenemos $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{9\pi}\text{cms}/\text{seg}.$



6.30 Un tanque cilíndrico de 1m de radio tiene un orificio en el fondo, un líquido contenido en el mismo, comienza a salir a una velocidad dada por $v = \sqrt{2gh}$, donde g es el módulo de la aceleración de gravedad y h es la profundidad del líquido en el tanque. Si la profundidad disminuye a razón de $-0.01\text{m}/\text{seg}$:

a) ¿Qué aceleración adquiere el líquido al salir por el orificio, en el momento en que la profundidad es de 2m?

b) ¿A qué razón disminuye el volumen del líquido en el tanque?

a) La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

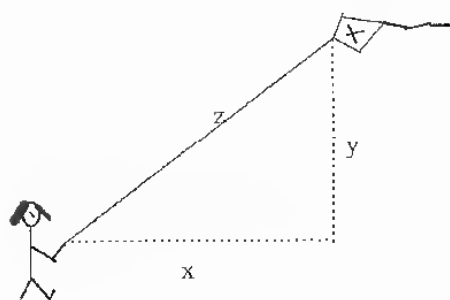
$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{\sqrt{2gh}} \frac{dh}{dt}. \quad \text{Para } h = 2\text{m} \text{ se tiene } \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{g}}{2} (-0.01\text{m}/\text{seg}) = -\frac{\sqrt{g}}{200}\text{m}/\text{seg}^2.$$

b) El volumen viene dado en función de la profundidad por $V = \pi r^2 h = \pi h$, luego

$$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi}{100} \text{ m}^3 / \text{seg}.$$

✓

6.31 Un papagayo vuela a 70m de altura y a 150 m de un niño que en ese instante suelta la cuerda a velocidad de 2m/seg. Sabiendo que el viento eleva el papagayo a 3m/seg, ¿cuál es la velocidad horizontal del viento?



Sea x la distancia horizontal del niño al pie de la vertical bajada del papagayo al suelo, e y la altura a que vuela éste, entonces $z^2 = x^2 + y^2$.

En ese instante $x = \sqrt{(150)^2 - (70)^2} = 40\sqrt{11}$

Por derivación implícita se tiene

$$z \frac{dz}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt},$$

donde, sustituyendo los datos se obtiene la velocidad horizontal del viento:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{150 \cdot 2 - 70 \cdot 3}{40\sqrt{11}} = \frac{9}{4\sqrt{11}} \text{ m/seg}.$$

✓

6.32 Dos trenes viajan en trayectorias ortogonales a un punto de confluencia. Uno de ellos está a 150 Km del punto de encuentro y se desplaza a 200Km/h, en ese instante el otro está a 90Km del punto y tiene una velocidad de 120Km/h.

a) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador de tráfico para tomar precauciones?

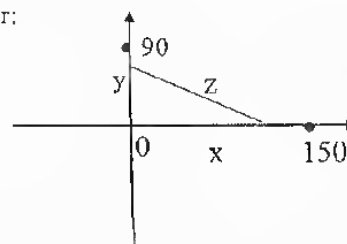
b) ¿A qué velocidad decrece la distancia entre ellos 30 minutos después?

La posición instantánea de cada uno de los trenes viene dada por:

$$x(t) = -150 + 200t$$

$$y(t) = -90 + 120t.$$

a) $x(t) = -150 + 200t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} \text{ h}$. El controlador dispone de 45 minutos para tomar precauciones.



b) Sea z la distancia entre ellos en un instante dado, entonces $z^2 = x^2 + y^2$. Derivando implícitamente se tiene $2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$, de donde simplificando y sustituyendo resulta:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(-150 + 200t)200 + (-90 + 120t)120}{\sqrt{(-150 + 200t)^2 + (-90 + 120t)^2}} = \frac{-4080 + 5440t}{\sqrt{306 - 816t + 544t^2}}.$$

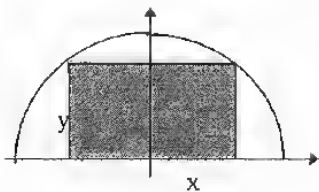
Para $t=0.5$ tenemos que los trenes se acercan a $\frac{dz}{dt}(0.5) = -\frac{1360}{\sqrt{34}} \text{ Km/h}.$

✓

Problemas de Optimización

6.33 Sea "a" el radio de un semicírculo. Encuentre las dimensiones del rectángulo inscrito de área máxima, si se requiere que dos de los vértices del rectángulo estén sobre el diámetro.

$$A = \pi r^2$$



Sea x, y , respectivamente, la base y la altura de la región rectangular correspondiente al primer cuadrante, luego el área total viene dada por:

$$A = 2xy.$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Se puede escribir el área en función de una sola variable:

$$A(x) = 2x\sqrt{a^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$A'(x) = 2\sqrt{a^2 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{2(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2x^2 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$; $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ no está en el dominio de la función.

Números críticos: $x = 0$; $x = a$; $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$A(0) = A(a) = 0$ son valores mínimos para A , pues $A(x) \geq 0$.

Así $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = a^2$ es un máximo absoluto, pues por la continuidad de A en $[0, a]$ no hay otra alternativa. Las dimensiones del rectángulo son:

$$\text{base: } \frac{2a}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \text{altura: } \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Nota:

Se podría usar el criterio de la 1ª derivada para determinar que $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ es un máximo. El criterio de la 2ª derivada resulta aquí algo inconveniente, ¿por qué?



6.34 Se desea construir un silo en forma de cilindro circular recto cubierto con una semiesfera para almacenar heno. El costo por metro cuadrado del material para construir la semiesfera es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones debe tener el silo para que el costo sea mínimo si la capacidad deseada es $500\pi \text{ m}^3$?

Observe que manteniendo la capacidad constante podemos construir silos distintos cambiando la base y la altura. Supongamos que el costo del metro cuadrado del material de la parte cilíndrica es χ (constante) y siendo r el radio del cilindro y h su altura, entonces el costo total (función a minimizar) es:

$$C = 2\pi r^2(2\chi) + 2\pi r h \chi \quad (1)$$

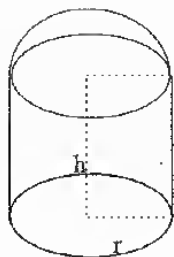
que es una función de dos variables (r y h). Como aquí, en este tipo de problemas casi siempre aparece una función de dos variables, se debe buscar alguna ecuación que relacione las dos variables con el fin de despejar una y sustituirla, obteniendo de esta forma una función de una sola variable, que son las que por ahora se tiene la teoría para optimizarlas. Por lo general, esa ecuación viene dada por la condición a que está sujeto el problema, en el caso que nos ocupa es el volumen fijo:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)}_{\text{vol. semiesf.}} + \underbrace{\pi r^2 h}_{\text{v.cil.}} = 500\pi,$$

$$\text{despejamos } h = \frac{1}{r^2} \left(500 - \frac{2}{3} r^3 \right),$$

sustituimos en (1) para obtener una función con variable r :

$$C(r) = 4\pi r^2 \chi + 2\pi r \frac{1}{r^2} \left(500 - \frac{2}{3} r^3 \right) \chi = \frac{8\pi}{3} r^2 \chi + \frac{1000}{r} \pi \chi,$$



el dominio físico de la función, es decir los valores para los cuales el problema geométrico tiene sentido, es para $r > 0$.

$$C'(r) = \frac{16\pi}{3}r - \frac{1000}{r^2}\pi = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}r - \frac{500}{r^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$\frac{8}{3}r^3 - 500 = 0$, cuya solución es $r = \frac{5}{2}\sqrt[3]{12}$ (número crítico).

$$C''(r) = \frac{16}{3}\pi + 2000\pi\frac{1}{r^3} \quad \text{y} \quad C''\left(\frac{5}{2}\sqrt[3]{12}\right) > 0, \text{ luego } C$$

alcanza un mínimo (criterio de la 2ª derivada).

Las dimensiones del silo serán:

$$r = \frac{5}{2}\sqrt[3]{12} \quad \text{y} \quad h = \frac{60}{\sqrt[3]{144}} \text{ metros.}$$



6.35 Una empresa recibe 2 propuestas para la fabricación de un tanque de agua de volumen fijo $V=54\pi\text{m}^3$.

Oferta 1: Tanque esférico construido con un material que cuesta Bs.5 el metro cuadrado.

Oferta 2: Tanque cilíndrico con tapa construido con un material que cuesta Bs.4 el metro cuadrado.

¿Cuál es la oferta más conveniente para la empresa?

El volumen y la superficie de la esfera dependen de una sola variable, el radio, por lo tanto, podemos calcular el costo de esta oferta:

$$V_{\text{esf}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 54\pi \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{81}{2}}, \text{ por lo tanto, el costo será: } C_{\text{esf}} = 5 \times S_{\text{esf}} = 5 \times 4\pi r^2 = 5 \times 4\pi \left(3\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^2 \approx 741$$

bolívaes por unidad fabricada.

El volumen y superficie del cilindro dependen de dos variables, radio y altura, luego se pueden construir diferentes cilindros para un volumen fijo. Siendo así, debemos calcular las dimensiones que dan una superficie mínima para tener un costo mínimo.

Superficie del cilindro con tapa: $S=2\pi rh+2\pi r^2$ que es, como se dijo, una función de dos variables. Para escribir S en función de una sola variable se usa el dato del problema de que el volumen es fijo:

$$\pi r^2 h = 54\pi \Rightarrow h = \frac{54}{r^2} \text{ luego } S(r) = 2\pi r \left(\frac{54}{r^2}\right) + 2\pi r^2 = 108\pi\frac{1}{r} + 2\pi r^2 \text{ con dominio físico } r > 0.$$

$$S' = -108\pi\frac{1}{r^2} + 4\pi = 0 \Leftrightarrow -108 + 4r^3 = 0 \Rightarrow r = 3 \text{ (número crítico).}$$

$$S'' = 216\pi\frac{1}{r^3} + 4\pi \quad \text{y} \quad S''(3) > 0, \text{ luego se obtiene un cilindro de superficie mínima con este radio. El}$$

costo de fabricación de cada unidad es:

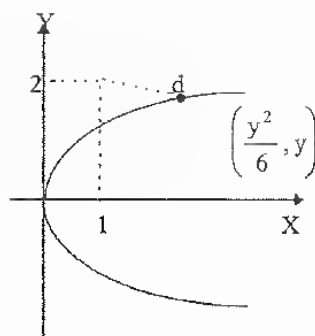
$$S = 108\pi\frac{1}{3} + 2\pi \cdot 9 \text{ y el costo } C_{\text{cil}} = 4 \times (108\pi\frac{1}{3} + 2\pi \cdot 9) \approx 678.6 \text{ bolívaes.}$$

Por lo tanto, comparando los dos costos, la empresa tendría que decidirse por el tanque cilíndrico



6.36 Encuentre la distancia mínima del punto (1,2) a la parábola $y^2=6x$.

Cualquier punto de la parábola tiene coordenadas $\left(\frac{y^2}{6}, y\right)$, por lo tanto, la distancia de uno de estos puntos al punto (1,2) viene dada por



$$d(y) = \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{6}\right)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{\frac{y^4}{36} + \frac{2y^2}{3} - 4y + 5},$$

que es la función a minimizar. Ahora bien, esta función alcanza un mínimo cuando lo hace la función subradical, con la cual es preferible trabajar porque los cálculos serán más sencillos:

$$g(y) = \frac{y^4}{36} + \frac{2y^2}{3} - 4y + 5,$$

$$g'(y) = \frac{y^3}{9} + \frac{4}{3}y - 4 = 0 \Leftrightarrow y^3 + 12y - 36 = 0 \quad \text{Para}$$

resolver esta ecuación, haremos uso del método de Newton y del teorema de los valores intermedios:

Sea $F(y) = y^3 + 12y - 36$ de donde $F'(y) = 3y^2 + 12 > 0$, luego $F \uparrow$ en \mathbb{R} y por lo tanto tiene una sola raíz real. Para ubicarla hacemos uso del teorema de los valores intermedio: $F(2) < 0$, $F(3) > 0$ y F es continua en $[2, 3]$ luego existe $c \in [2, 3]$ tal que $F(c) = 0$.

Para calcular su valor aproximado usaremos el método de Newton:

Tomamos como aproximación inicial $y_0 = 2$:

n	y_n	$F(y_n)$	$F'(y_n)$	$y_{n+1} = y_n - \frac{F(y_n)}{F'(y_n)}$
0	2	-4	24	2,16666667
1	2,16666667	0,17129634	26,08333338	2,1600994
2	2,1600994	0,00028012	25,99808825	2,16008863
3	2,16008863	0,00000015	25,99794867	2,16008863

Número crítico $y = 2,16008863$

$g''(y) = \frac{y^2}{3} + \frac{4}{3} > 0$, por lo tanto, g alcanza un valor mínimo en 2,16008863, y la distancia mínima del punto (1,2) a la parábola es aproximadamente:

$$d(2,16008863) = 0,27397394.$$



6.37 Ley de refracción

En 1650, Pierre Fermat descubrió un notable principio que actualmente expresamos, a menudo, en los siguientes términos: Un rayo luminoso que va de un punto a otro sigue una trayectoria tal que, comparada con otras trayectorias cercanas, el tiempo que requiere para recorrerla es un mínimo, es un máximo o bien queda fijo.

Por otro lado, se sabe que la velocidad de la luz depende de la densidad del medio en que viaja, es menor en los medios más densos, y que ésta se propaga en línea recta.

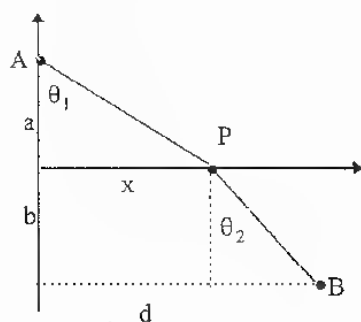
Probar que si un rayo de luz va desde un punto A, situado en un medio en que la velocidad de la luz es V_1 a un punto B, situado en un medio donde la velocidad de la luz es V_2 , el tiempo es mínimo si los ángulos de incidencia θ_1 y refracción θ_2 satisfacen la siguiente relación:

$$\frac{\sin \theta_1}{V_1} = \frac{\sin \theta_2}{V_2} \quad (\text{ley de refracción}).$$

Por el principio de Fermat la función a minimizar es el tiempo, para el cual recordemos que tiempo = $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$.

En cada uno de los medios, la trayectoria seguida por la luz es una línea recta, su velocidad es constante. Sea P el punto de paso de un medio al otro, θ_1 el ángulo de incidencia y θ_2 el ángulo de refracción.

El tiempo requerido para ir de A a P y de P a B son, respectivamente :



$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}.$$

El tiempo total, en función de x , será:

$$t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2} \quad 0 \leq x \leq d.$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \frac{\text{sen} \theta_1}{v_1} - \frac{\text{sen} \theta_2}{v_2}, \text{ o}$$

sea que $\frac{dt}{dx} = 0$ en algún punto $x_0 \in (0, d)$, para el cual

$$\frac{\text{sen} \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen} \theta_2}{v_2}.$$

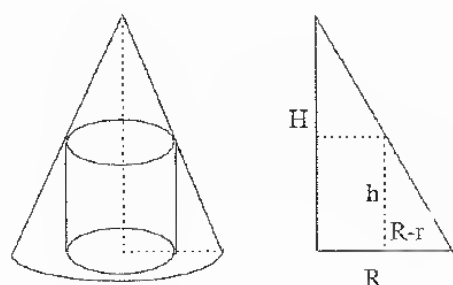
Veamos ahora que la función t alcanza un mínimo absoluto en $x = x_0$:

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\text{sen} \theta_1}{v_1} \text{ es creciente en } [0, d] \text{ y se anula para } x=0; \quad \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \frac{\text{sen} \theta_2}{v_2}, \text{ es decreciente}$$

en $[0, d]$ y se anula en $x=d$. Luego, tenemos que $\frac{dt}{dx} < 0$ en $(0, x_0)$ y $\frac{dt}{dx} > 0$ en (x_0, d) , por lo tanto, t tiene un mínimo absoluto en $x = x_0$.



6.38 Calcule las dimensiones del cilindro de volumen máximo que se puede inscribir en un cono de radio R y altura H .



El volumen del cilindro en dos variables h y r es $V = \pi r^2 h$; para escribirla en función de una sola variable se usa el hecho de que el cilindro está inscrito en el cono, con lo cual se obtiene la siguiente relación triangular:

$$\frac{R-r}{R} = \frac{h}{H} \quad \text{de donde} \quad h = H \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Sustituyendo se obtiene:

$$V(r) = \pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \pi H r^2 - \frac{\pi H}{R} r^3 \quad \text{con} \quad 0 \leq r \leq R.$$

$$V'(r) = 2\pi H r - \frac{3\pi H}{R} r^2.$$

$r=0$ y $r=R$ por ser extremos del dominio son números críticos; además de éstos también lo son las soluciones de $r\pi H \left(2 - \frac{3r}{R}\right) = 0$, es decir, $r = \frac{2}{3}R$. $V''(r) = 2\pi H - \frac{6\pi H}{R}r$ y $V''(\frac{2}{3}R) < 0$, luego, en

$r = \frac{2}{3}R$ V alcanza un máximo absoluto, pues para $r=0$ y $r=R$ el volumen es cero.

Las dimensiones son:

$$\text{radio de la base } \frac{2}{3}R \quad \text{y altura } \frac{1}{3}H.$$



6.39.- La empresa IVA es propietaria de un edificio de 50 apartamentos. Todos se encuentran ocupados cuando el alquiler mensual por apartamento es de Bs. 3.600. IVA ha observado que por cada Bs. 200 de aumento en el alquiler se desocupan dos apartamentos. Cada inquilino paga Bs. 240 mensuales de condominio, pero este pago lo debe hacer la empresa por cada apartamento desocupado. Calcular cuánto deberá cobrar IVA, por el alquiler mensual de cada apartamento ocupado, para obtener un beneficio máximo.

Sea x el número de apartamentos desocupados. La ganancia en función de x vendrá dada por

$$G(x) = (3600 + 200 \frac{x}{2})(50 - x) - 240x.$$

Pensemos ahora a x como un número real cualquiera, y no como un natural, en el intervalo $[0, 50]$:

$G'(x) = 100(50 - x) - (3600 + 100x) - 240$, la cual se anula cuando $-200x + 1160 = 0$, esto es, en $x = \frac{29}{5}$ (número crítico).

$G''(x) = -200 < 0$, luego G alcanza un valor máximo en $x = \frac{29}{5}$, que está comprendido entre 5 y 6.

Debemos chequear para cuál de estas dos cantidades de apartamentos desocupados la ganancia es mayor: $G(5) = 183.300 < G(6) = 183.360$. Para los extremos del intervalo tenemos que la ganancia sería de Bs. 180.000 si todos los apartamentos estuvieran ocupados y obviamente si todos están desocupados habría pérdidas.

Por lo tanto, debe cobrar por apartamento: $3600 + 200 \cdot 3 = 4200$ Bolívars.



6.40 La iluminación en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al foco luminoso, y directamente proporcional a la intensidad del foco y al coseno del ángulo formado por el rayo de luz y la normal a la superficie iluminada.

Determinar ¿a qué altura se debe situar una bombilla sobre el centro de una mesa redonda para obtener una iluminación máxima en el borde?

La iluminación viene dada por:

$$I = \frac{ki}{L^2} \cos \beta = \frac{ki}{L^2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{ki}{L^2} \sin \alpha,$$

como función de las variables, L y α (i es la intensidad). Para escribirla dependiendo de una sola variable observe que $\cos \alpha = \frac{R}{L}$

de donde $\frac{1}{L^2} = \frac{1}{R^2} \cos^2 \alpha$. Por lo tanto,

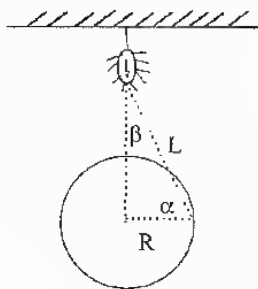
$$I(\alpha) = \frac{ki}{R^2} \sin \alpha \cos^2 \alpha \text{ con } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$I' = \frac{ki}{R^2} [\cos \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot 2 \cos \alpha]$. $I' = 0$ si y sólo si $\cos \alpha (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) = 0$ cuya solución es

$$\alpha_1 = \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Números críticos: $\alpha_1 = \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\alpha = 0$. $I(0) = 0$ es un valor mínimo porque $I(\alpha) \geq 0$.

$$0 \qquad \alpha_1 \qquad \frac{\pi}{2}$$

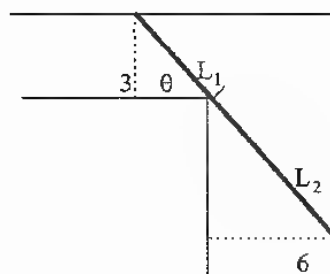


Signo de l'	+	-
Crecimiento	$l \uparrow$	$l \downarrow$

Luego por el criterio de la primera derivada l alcanza un valor máximo en α_1 , ya que es una función continua en dicho punto. La altura a que se debe colocar la bombilla es $h = R \operatorname{tg}(\alpha_1) = R \operatorname{tg}\left(\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{R}{\sqrt{2}}$.



6.41 Un pasillo de 6mts de ancho comunica con otro de 3mts mediante un ángulo recto. Se quiere calcular la máxima longitud de una viga de espesor despreciable que se puede pasar de un pasillo al otro.



La longitud total de la viga se puede escribir en función del ángulo θ :

$$L = L_1 + L_2 = \frac{3}{\operatorname{sen} \theta} + \frac{6}{\cos \theta} \quad \text{con} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Observe que físicamente el problema corresponde a buscar un mínimo para la función L .

$$L'(\theta) = -\frac{3 \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{6 \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{-3 \cos^3 \theta + 6 \operatorname{sen}^3 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta}.$$

$$L'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -3 \cos^3 \theta + 6 \operatorname{sen}^3 \theta = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}\right)^3 = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Usamos el criterio de la 1^{ra} derivada para chequear que en el número crítico anterior se alcanza un mínimo, puesto que L es continua:

	0	θ_1	$\pi/2$
Signo de L'	-	+	
Crecimiento	$L \downarrow$	$L \uparrow$	

Por lo tanto, $L(\theta_1) = \frac{3}{\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)} + \frac{6}{\cos\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)} = 3\sqrt{1+2^{2/3}} + \frac{6\sqrt{1+2^{2/3}}}{2^{1/3}} = 3\left(1+2^{2/3}\right)^{3/2}$ es un valor

mínimo y corresponde a la viga de máxima longitud que puede pasar por la esquina.



Diferenciales

6.42 Usar (6.18.1) para calcular el valor aproximado de $\operatorname{Ln} 3$.

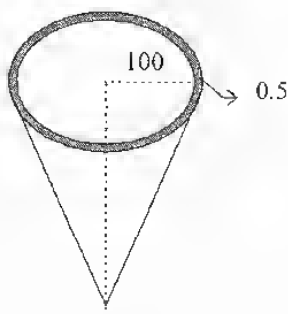
Sea $f(x) = \operatorname{Ln} x$, luego aplicando (6.18.1) a la función f se tiene $\operatorname{Ln}(x_0 + dx) \approx \operatorname{Ln}(x_0) + \frac{1}{x_0} dx$. Se debe buscar un número x_0 , lo más cercano a 3 como sea posible, de forma que para ese número se conozca el valor de $\operatorname{Ln} x_0$, obviamente ese número es e . Poniendo $e \approx 2.71828$ tendremos $dx = 3 - x_0 = 0.28172$ y

$$\operatorname{Ln} 3 \approx \operatorname{Ln} e + \frac{1}{2.71828} \cdot 0.28172 = 1.10364.$$

Una calculadora, usando cinco dígitos, dará el valor $\ln 3 \approx 1.09861$ en forma rápida y con mayor precisión que el método anterior.



6.43 Calcular el volumen aproximado de material necesario para construir un cono circular recto de radio interior 1m y espesor 0.5cm. La altura permanece constante.



El volumen del cono viene dado por $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ con h constante.

El volumen del cascarón del cono es

$$\Delta V = V(100 + dr) - V(100).$$

$dV = \frac{2}{3}\pi r h dr$, sustituyendo $r=100$ y $dr=0.5$ tenemos

$$dV = \frac{100}{3}\pi h \text{ cm}^3 \text{ s.}$$

Por lo tanto, el volumen del material es

$$\Delta V \approx \frac{100}{3}\pi h \text{ cm}^3 \text{ s.}$$



6.44 El instrumento usado para medir la arista de un cubo tiene un margen de error de 0.01cms. Estimar el error que se comete en la superficie del mismo si la arista mide 70cms. Calcular los errores relativo y porcentual.

La superficie es $A(x) = 6x^2$, luego $dA = 12x dx$ y $\Delta A \approx 12x dx$. El error en la medición de la arista puede ser por exceso o por defecto, es decir $|dx| \leq 0.01$, por lo tanto, el error en la superficie es:

$$|\Delta A| \approx 12x|dx| \leq 12 \cdot 70 \cdot 0.01 = 8.4 \text{ cm}^2 \text{ s.}$$

Error relativo:

$$\frac{dA(70)}{A(70)} = \frac{12 \cdot 70 \cdot (\pm 0.01)}{6 \cdot (70)^2} = \pm 0.00029.$$

Error porcentual:

$$\frac{dA(70)}{A(70)} \times 100 = \frac{12 \cdot 70 \cdot 0.01}{6 \cdot (70)^2} \times 100 = 0.029 \text{ \%}.$$



6.45 Dar la aproximación lineal de la función $f(x) = \sin x$ en $x = \frac{\pi}{4}$.

$$f(x) \approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ luego}$$

$$\sin x \approx \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$



6.46 Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, hallar su aproximación lineal para $x = 0$, y calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

La aproximación lineal de f en $x = 0$ será $f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0)$.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cosh h}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{2h} = \frac{1}{2},$$

por lo tanto, tenemos $f(x) \approx \frac{1}{2}x$.

Para calcular el límite podemos reemplazar la función por su aproximación lineal:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x = 0.$$

Esta técnica para calcular límites se llama **infinitésimos**.



EJERCICIOS PARA SER RESUELTOS POR EL ESTUDIANTE

Aplicaciones Geométricas

1.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de la función $y = \arccos 3x$ en el punto de intersección con el eje OY.

2.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva descrita por la ecuación $y^2 3^x - 3^{-x} = 4y$, en el punto de ordenada $y = 1$.

3.- Dada la curva de ecuación $y^3 \log_2(x+1) - \log_2(x^2 - 1) = y^2$, hallar la ecuación de la recta normal a su gráfica en el punto de ordenada $y = 1$.

4.- a) Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y^2 - 4x^2 = 4$ en el punto (x_1, y_1) es $4x_1x - y_1y + 4 = 0$.

b) Demostrar que el triángulo formado por una tangente cualquiera a la hipérbola $y^2 - 4x^2 = 4$ y sus asíntotas tiene área constante.

5.- Encontrar las ecuaciones de las tres rectas que pasan por el punto de coordenadas $(P, 0)$ y que son normales a la parábola de ecuación $y^2 = Px$.

6.- Probar que dos rectas tangentes a una parábola siempre se interceptan.

7.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 32x$ paralela a la recta $4x + 3y + 10 = 0$.

8.- Dar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de ecuación $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} \end{cases}$ paralelas a la recta $y - x + 10 = 0$.

9.- Demostrar que las tangentes a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trazadas por los extremos de una cuerda que pase por su centro son paralelas.

10.- **Propiedad reflectora de los elipses:**

Demostrar que la perpendicular a la tangente a una elipse, en cualquiera de sus puntos, es la bisectriz del ángulo formado por las rectas que pasan por los focos y por el punto.

11.- **Propiedad reflectora de las hipérbolas:**

Demostrar que la recta tangente en un punto P de una hipérbola es la bisectriz del ángulo formado por las rectas que pasan por los focos y por el punto.

Teoremas de Rolle y Valor Medio.

12.- Hallar los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio

$$12.1 \quad f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x \quad \text{en} \quad [1, 2].$$

$$12.2 \quad f(x) = e^x \quad \text{en} \quad [0, 1]$$

$$12.3 \quad f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{en} \quad [-1, 1]$$

13.- Hallar los valores de c que satisfacen el teorema de Rolle:

$$13.1 \quad f(x) = x^3 + x^2 - 6x \quad \text{en} \quad [-3, 2].$$

$$13.2 \quad f(x) = (x^2 - 1)e^{x^2} \quad \text{en} \quad [-1, 1]$$

14.- La función $f(x) = \sqrt{|x|}$ tiene valores iguales en números simétricos respecto del cero. Explique ¿por qué no satisface el teorema de Rolle?

15.- Dada la función $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$ y $b = \pi$, comprobar que no existe $c \in [0, \pi]$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Explicar ¿por qué esto no contradice el Teorema del Valor Medio?

16.- Demostrar analíticamente, y de ser posible geoméricamente, que las ecuaciones siguientes tienen una sola raíz real:

$$16.1 \quad e^x = 1 + x$$

$$16.2 \quad \operatorname{arctg} x = \arccos x$$

$$16.3 \quad 6x^5 + 13x + 1 = 0 \quad 16.4 \quad \operatorname{Ln} x = -x^2 + 3$$

17.- Probar que la ecuación $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$ no tiene más de dos raíces reales.

18.- Sea P un polinomio no constante $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Demostrar que entre dos raíces consecutivas cualesquiera de la ecuación $P'(x) = 0$, existe, a lo sumo, una raíz de la ecuación $P(x) = 0$.

19.- Demostrar que para cada $x > 0$, se cumplen las desigualdades:

$$19.1 \quad \operatorname{sen} x < x.$$

$$19.2 \quad \operatorname{sen} hx > x$$

$$19.3 \quad \operatorname{arccotg} x > -x + \frac{\pi}{2}$$

20.- Demuestre las siguientes desigualdades en los intervalos indicados:

$$20.1 \quad |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| < |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$20.2 \quad \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}, \quad x < 0.$$

$$20.3 \quad \left| \frac{\cos ax - \cos bx}{x} \right| < |b - a|, \quad x \in \mathbb{R}$$

21.- Demostrar lo siguiente:

a) Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) \equiv 0$ en $[a, b]$ entonces f es constante.

b) Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) \equiv g'(x)$ en $[a, b]$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$.

22.- Probar que $\operatorname{Cos}(x+h) - \operatorname{Cos} x = -h \operatorname{Sen} \xi$ con $x < \xi < x+h$.

Aplicaciones Físicas

23.- La posición de una partícula, que se mueve sobre una línea recta, viene dada por :

$$f(t) = t^2 e^{-2t}$$

a) Calcule los instantes en que la partícula está parada.

b) Los intervalos de tiempo en los cuales la partícula se mueve hacia la derecha y hacia la izquierda.

c) La aceleración instantánea de la partícula.

24.- Una partícula se mueve sobre la trayectoria $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, siendo x el desplazamiento horizontal, y el vertical.

Si al pasar por el punto (x_0, y_0) tiene una velocidad horizontal V_0 , calcule su velocidad vertical y rapidez tangencial en función de a , b , x_0 , V_0 .

25.- Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 100m/seg. Su altura sobre el suelo viene dada por $f(t) = -4.9t^2 + 100t$ (tiempo en segundos).

- Calcular el tiempo que tarda en regresar al suelo y su velocidad en ese instante.
- Calcular la altura máxima que alcanza la piedra.
- Calcular los intervalos de tiempo en que se mueve hacia arriba y hacia abajo.
- ¿Cuál es su aceleración instantánea?

26.- Una partícula se mueve sobre la curva $y = \frac{4}{4+x^2}$ (curva de Agnesi). Si la componente horizontal de la velocidad $\frac{dx}{dt}$ es constante y positiva, calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy}{dt}$.

27.- Una partícula se mueve sobre la curva $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$; caracol de Pascal. Cuando la partícula está en el punto $(2, \sqrt{2+2\sqrt{5}})$ la velocidad horizontal es $\frac{dx}{dt} = 1$ unidad / seg.

- ¿Cuál es su velocidad vertical?
- ¿La partícula sube o baja en ese instante?

Regla de L'Hôpital

28.- Calcule los siguientes límites:

$$28.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$28.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$$

$$28.3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$$

$$28.4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{e^x}$$

$$28.5 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$$

$$28.6 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2}$$

$$28.7 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10}}{10^x}$$

$$28.8 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m}; n, m \in \mathbb{N}$$

¿Qué conclusiones geométricas obtiene de los resultados anteriores?

29.- Calcule los siguientes límites:

$$29.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{3x} + \ln x}{e^{3x} + x^2}$$

$$29.2 \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$29.3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(4x) - 8x^2 - 1}{\sin(6x) + 12x^4 + 36x^3 - 6x}$$

$$29.4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

$$29.5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh x + \sqrt{x}}{e^x + \ln x}$$

$$29.6 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \arctg(x^2) - \pi}$$

$$29.7 \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot x}$$

$$29.8 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

$$29.9 \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{-1/x}$$

$$29.10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$$

$$29.11 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 - \tg x) \sec 2x$$

$$29.12 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$$

$$29.13 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$29.14 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{e^{2x} - 1}$$

$$29.15 \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - \ln(1+x)]$$

$$29.16 \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \ln(x-1)$$

$$29.17 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sen x)^{1/3} - 1}{\ln(1+x)}$$

$$29.18 \lim_{x \rightarrow 0^+} \sen x \ln(\sen x)$$

$$29.19 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \arctg x^2 - \pi}$$

$$29.20 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x^3 + 6x^2 - 8x + 2}{7x^2 - 2} \right)^{\frac{x^2 - 1}{x}}$$

30.- En el cálculo de los siguientes límites, usando la regla de L'Hôpital, hay errores, descríbalos:

$$30.1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-e^x} = -1$$

$$30.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Método de Newton

31.- Dada $f(x) = x^3 + 2x - 4$

- Demuestre que tiene una raíz en $[1, 2]$
- Calcule la raíz con tres cifras decimales exactas.

32.- Dada la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$.

- Determinar cuántas raíces tiene.
- Halle la raíz negativa con tres cifras decimales exactas.

33.- a) Establezca geoméricamente el número de soluciones de la ecuación $3^{-x} - x - 2 = 0$.

- Calcule sus soluciones con tres cifras decimales exactas.

34.- Calcular la solución positiva de la ecuación $2^{x+1} = x3^x$

35.- Hallar la solución de $\cos x = x$ con cinco cifras decimales exactas.

36.- Hallar la abscisa del punto intersección entre las curvas $y = e^x$ e $y = -x + 2$ con cinco cifras decimales exactas.

37.- Determine con cuatro cifras decimales exactas los puntos de intersección de los gráficos de $y = \operatorname{sech} x$ e $y = x^2$.

38.- Encuentre la solución de la ecuaciones:

$$\operatorname{Ln} x - \frac{1}{x} = 0 \quad \operatorname{Ln} x = -x^2 + 3,$$

con tres cifras decimales exactas.

Criterios de la primera y segunda derivadas

39.- Calcular los números críticos de las siguientes funciones:

$$39.1 f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

$$39.2 f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$39.3 f(x) = -3x^2 + 12|x| + 1$$

$$39.4 f(x) = x^2 \sqrt{4 - x^2}$$

$$39.5 f(x) = x e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$39.6 f(x) = \operatorname{Ln} \left(\frac{2x}{4 + x^2} \right)$$

40.- Dada $f(x) = x + \cos x$

- Halle sus números críticos.
- ¿ f alcanza valores extremos en dichos números críticos?

41.- Dibuje una gráfica para $y = f(x)$ sabiendo que:

$$f(-1) = -3, f(2) = 4, f(0) = 1; f'(-1) = 0, f'(2) \text{ no existe}, f'(x) < 0 \text{ si } x < -1, \\ f'(x) > 0 \text{ en } (-1, 2), f'(x) > 0 \text{ si } x > 2; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

42.- Dibuje una gráfica para $y = f(x)$ sabiendo que $f'(x) > 0$ si $x > 0$ y $f'(x) < 0$ si $x < 0$ y además:

42.1 $f(x)$ es continua en $x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$.

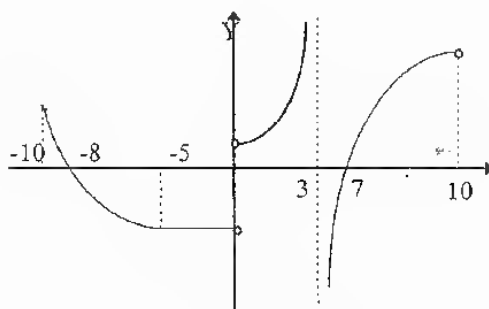
42.2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$

43.- Dibuje una gráfica para $y = f(x)$ sabiendo que:

43.1 $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y f es impar.

43.2 $f'(x) < 0$ para $x < 0$, $f(0) = 3$ y f es par.

44.- Dada la siguiente gráfica para $f'(x)$:



y las condiciones $D(f) = [-10, 10]$, $R(f) = [-6, 7]$, $f(-10) = 4$ y $f(10) = 3$.

a) Dar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y valores extremos de f .

b) Dar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de f .

c) Construir un gráfico de f en forma aproximada.

45.- Estudiar los intervalos de concavidad de las siguientes funciones:

45.1 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

45.2 $f(x) = x^4$

45.3 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

45.4 $f(x) = x^2 e^{-x}$

45.5 $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

46.- Dibuje una gráfica para $y = f(x)$ sabiendo que $f(0) = 0$, $f''(x) > 0$ si $x > 0$, $f''(x) < 0$ si $x < 0$ y además:

46.1 $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

46.2 $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

44.3 $f'(x) < 0$ si $x < 0$ y $f'(x) > 0$ si $x > 0$

46.4 $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x > 0$

47.- Sea $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + c$, encuentre los valores de las constantes para que la función f alcance un máximo relativo con valor 2 en $x = -1$ y un mínimo relativo con valor -1 en $x = 1$.

48.- El recíproco del teorema 6.8 es falso. Verifique ésta afirmación con las funciones $f(x) = \pm x^3$.

49.- El recíproco del teorema 6.11 es falso. Verifique ésta afirmación con las funciones $f(x) = \pm x^4$.

Variaciones Relacionadas

50.- Calcule la tasa de cambio del área de un sector circular, si su perímetro se mantiene constante, y su radio aumenta a razón de 3 cm/min en el instante en que su radio es 37 cm y su ángulo central $\frac{\pi}{4}$.

51.- Un avión vuela con una velocidad de 500Km/h y con una inclinación de 45° hacia arriba. Encuentre la rapidez de cambio de la distancia del avión a una torre de control en tierra, un minuto después de que éste pasó directamente 3Km arriba de ella (desprecie la altura de la torre).

52.- Un balón esférico se infla con gas a razón de $20 \text{ cm}^3/\text{seg}$. ¿A qué velocidad está creciendo su radio en el instante en que el radio es de 30 cms?

53.-Una solución se vierte a razón de $2 \text{ cm}^3/\text{min}$ en un filtro cónico cuyo radio de la base es de 6 cms y de altura 24 cm y se filtra a razón de 1 cm^3 por minuto. ¿Cuál es la velocidad de elevación del nivel del líquido cuando este se halla a 8 cm de altura?

54.- En un cono circular recto se aumenta el radio de la base, a razón de .5 cm/min, manteniendo constante e igual a 5 cms la longitud de la generatriz. Determinar la razón de cambio del volumen del cono cuando el radio es de 3cms.

55.- En un instante la sombra de un árbol de 20m de alto es de 30m de longitud. Si el ángulo que forma el sol con el suelo disminuye a razón de 15° por hora, ¿a qué razón aumenta la longitud de la sombra en ese instante?

56.- Un automóvil se desplaza por una pista en forma de triángulo equilátero de 5Km de lado a 250Km/h. En el instante en que el automóvil está a 3 Km de uno de los extremos de la recta, ¿a qué velocidad cambia su distancia al punto de partida que está en ese instante en el vértice opuesto?

57.- La arista de un cubo crece a razón de 3cms/seg. Calcular con qué velocidad está cambiando el volumen en cada uno de los siguientes instantes:

- a) Cuando la arista mide 1 cm.
- b) Cuando la diagonal mide 10 cm.

58.-Dos barcos se alejan del origen de coordenadas en línea recta, formando un ángulo de 150° . ¿Con qué rapidez varía la distancia entre ellos si en un instante se encuentran a 18 Km y 10 Km del origen y su velocidad es, respectivamente, 28 Km/h y 42 Km/h.

Problemas de Optimización

59.- La potencia eléctrica en watios en un circuito (de corriente continua) con dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo es:

$$P = \frac{vR_1R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

donde v es el voltaje. Si v y R_1 se mantienen constantes, ¿Qué resistencia R_2 da lugar a la potencia máxima?

60.- Hallar en qué punto la tangente a la curva $y = \arctg \frac{1}{x^2}$ tiene pendiente máxima.

61.- Hallar el área máxima del triángulo, inscrito en la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, con un lado coincidiendo con un diámetro.

62.- Determinar las dimensiones del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio r.

63.- Para cercar un terreno rectangular a la orilla de un río se emplean dos tipos de materiales. El material para cercar los dos costados perpendiculares a la ribera del río cuesta Bs. 800 el metro y el material para cercar el lado paralelo al río cuesta Bs. 1200 el metro. Si la ribera del río no necesita cerca y se disponen de Bs.36.000 para los gastos de materiales, ¿cuáles serán las medidas del terreno de área máxima que se puede cercar?

64.- Se desea construir un envase para gas en forma de cilindro circular recto y semiesferas en los extremos. El

costo por metro cuadrado de las semiesferas es el doble del de la parte cilíndrica. ¿Cuáles son las dimensiones que minimizan el costo si la capacidad ha de ser $10\pi m^3$?

65.- En una fábrica de espejos, el costo de cada espejo es directamente proporcional a su área. Debido a un descuido en el manejo de un espejo rectangular de lados 80 y 90, un empleado que lo maniobra lo deja caer y rompe una esquina en forma aproximada de triángulo rectángulo con dimensiones 12x10, respectivamente (12 en el lado de 80). Determinar el área máxima del espejo rectangular que se puede obtener con el espejo roto.

66.- Se desea construir un envase cilíndrico circular recto sin tapa, cuyo volumen sea $1000\pi \text{ cm}^3$. Si el precio del material para la superficie lateral es de Bs. $7/\text{cm}^2$ y el de la tapa del fondo es Bs. $56/\text{cm}^2$, halle las dimensiones óptimas del envase para minimizar el costo de fabricación.

67.- Una etiqueta impresa debe contener 50 cm^2 s de texto con un margen de 4cms arriba y abajo, y de 2cms a los lados. Hállense las dimensiones de la hoja de papel de manera que su área sea mínima.

68.- Con un pedazo de alambre se forma un triángulo isósceles. Indicar cómo se debe doblar dicho alambre, para que el volumen generado por la rotación del triángulo alrededor de su base sea máximo.

Determinar si se debe modificar el triángulo para que el volumen generado por la rotación del triángulo alrededor de la altura relativa a la base sea máximo.

69.- La sección transversal de una viga de madera tiene forma rectangular con ancho a y alto b . Sabiendo que su resistencia es directamente proporcional a la cantidad ab^2 , hallar las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse a partir de un tronco cilíndrico de diámetro d .

70.- Una autopista está diseñada de acuerdo al gráfico de la función $y=Ln x$. Si un pueblo está situado en el origen de coordenadas, ¿cuál será la ecuación de la carretera recta de la autopista al pueblo de forma que su longitud sea mínima?

71.- Para llevar agua entre dos puntos de una hacienda, se tienen los materiales necesarios para construir un canal abierto, en forma triangular, cuyas paredes laterales tienen una longitud de $2L$. ¿Cuál debe ser la abertura de este para que el caudal sea máximo?

72.- Un canal de riego, hecho de concreto, ha de ser un trapecioide isósceles con tres lados de 4m. Hallar la anchura superior x , si se desea que tenga caudal máximo.

73.- Desde una central telefónica que está a 15 Km por la costa del punto más cercano a una isla, situada 20 Km mar adentro, se quiere tender un cable. Desplegar el cable por tierra cuesta Bs. 30.000 y por mar Bs. 50.000 por Km. ¿Cuál es el tendido más económico de la central a la isla?

74.- Un vaso cónico de papel debe contener 30cm^3 de líquido. Encontrar la altura y el radio de la base del vaso que requerirá la menor cantidad de papel.

75.- Un afiche pegado en una pared tiene sus bordes superior e inferior a las alturas de 4m y 1m, respecto a la visual horizontal del observador. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el observador para que el ángulo visual que abarca el alto del afiche sea máximo?

76.- Dos aviones vuelan a una misma altura. A las 12:00 M. el avión A está a 700Km en dirección oeste del avión B. Si el A viaja a 600Km/h en dirección este y el B vuela en dirección noroeste a $600\sqrt{2}\text{Km/h}$, ¿en qué instante su distancia es mínima?

77.- (Ley de reflexión)

Un rayo de luz parte de un punto A, se propaga en el aire en línea recta y velocidad constante, incidiendo sobre una superficie plana y se refleja hasta llegar al punto B. Demuestre que el tiempo necesario para ir de A a B es mínimo si el ángulo de incidencia θ_1 es igual al ángulo de reflexión θ_2 .

Gráficos de funciones

78.- Construya el gráfico de las siguientes funciones:

Recuerde toda la información que necesita.

$$78.1 \quad f(x) = e^{1/x}$$

$$78.2 \quad f(x) = x^5 - 3x^4$$

$$78.2 \quad f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 8}$$

$$78.3 \quad f(x) = x + \sin x$$

$$78.4 \quad f(x) = x^2 \ln x$$

$$78.5 \quad f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$78.6 \quad f(x) = x^3 e^{-12/x}$$

$$78.7 \quad f(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{x - 1}$$

$$78.8 \quad f(x) = e^{x^2/x^2 - 1}$$

$$78.9 \quad f(x) = x \ln |x|$$

$$78.10 \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

$$78.11 \quad f(x) = (1 + x^2) e^{-x^2}$$

$$78.12 \quad f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$$

$$78.13 \quad f(x) = \frac{1}{2 + 3^{1/x}}$$

$$78.14 \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$78.15 \quad f(x) = x - \frac{\ln |x|}{x}$$

$$78.16 \quad f(x) = \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2x+5}}$$

$$78.17 \quad f(x) = x^{2/3} (x - 7)^2$$

$$78.18 \quad f(x) = (|x| + x^2) e^{-x}$$

Diferenciales

79.- Hallar la diferencial de las siguientes funciones:

$$79.1 \quad y = \arctg\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$79.2 \quad y = \frac{x^2}{1-x}$$

$$79.3 \quad f(x) = \cosh(4x)$$

80.- La ley de Ohm relaciona la intensidad de corriente en función de la resistencia mediante $I = \frac{E}{R}$. Probar que

una pequeña variación en la resistencia induce una variación en la corriente dada por $\Delta I = -\frac{I}{R} \Delta R$.

81.- Calcule el cambio aproximado en el alcance de un proyectil que sabemos está dado por $R = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$, si la velocidad inicial es $v = 25 \text{ m/seg}$ y el ángulo de inclinación pasa de 45° a 46° .

82.- Al medir el radio de un círculo se produce un error de 0.01 cms.

a) Estimar el error en el área para $r=3\text{m}$.

b) Calcular el error relativo y porcentual.

83.- Use diferenciales para calcular el volumen aproximado de fibra de vidrio necesaria para construir un tanque de agua esférico con 2m de diámetro y espesor 1cm.

84.- Use diferenciales para calcular el volumen de pintura necesaria para cubrir un silo cilíndrico de 50m de diámetro con una capa de pintura de 0.05 cm de espesor.

85.- Hallar la aproximación lineal de las siguientes funciones:

85.1 $g(x) = (x+1)^n$, alrededor de $x=0$.

85.2 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, alrededor de $x=0$.

86.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Calcule $f'(0)$.

b) Deduzca la aproximación lineal de f en $x=0$.

c) Deduzca el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

87.- Hallar la aproximación lineal de $f(x) = \ln(x+1)$ para $x = 0$.

Utilice el resultado anterior para calcular los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS IMPARES

1. $6x + 2y - \pi = 0$ y $2x - 6y + 3\pi = 0$

3. $210 \ln\left(\frac{75}{32}\right)x - 44y + 44 - \frac{3}{5} \ln\left(\frac{75}{32}\right) = 0$

5. $y = 0$; $2|P|x + \sqrt{2}Py - 2P|P| = 0$; $2|P|x - \sqrt{2}Py - 2P|P| = 0$

7. $4x + 3y + 18 = 0$ 12.1 $-1 + \frac{\sqrt{57}}{3}$

12.3 $\arccos(\sin(1)) \approx 0.5708$ 13.1 $-\frac{1+\sqrt{19}}{3}$ y $\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$

23. a) $t = 0$ y $t = 1$ b) Derecha: $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$; Izquierda: $(0, 1)$ c) $2e^{-2t}(1 - 4t + 2t^2)$

25. a) $\frac{1000}{49} \text{ seg}$ b) $\frac{1000}{98}$ c) $\left(0, \frac{1000}{98}\right)$ y $\left(\frac{1000}{98}, \frac{1000}{49}\right)$, respectivamente, d) -9.8 m/seg^2

27. a) $\frac{dy}{dt}\left(2, \sqrt{2+2\sqrt{5}}\right) = \frac{2-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$ b) La partícula baja.

28.1 0 28.3 $+\infty$ 28.5 $-\infty$ 28.7 0

29.1 2 29.3 $\frac{8}{9}$ 29.5 $\frac{1}{2}$ 29.7 1

29.9 $-\infty$ 29.11 1 29.13 $\frac{1}{6}$ 29.15 0

29.17 $\frac{1}{3}$ 29.19 $-\frac{1}{2}$ 31 b) 1.179 33 b) -0.417

35 0.7390837 37 ± 0.8501

39.1 $-\frac{3}{4}$ 39.3 -2 ; 2 ; 0

39.5 $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 45.1 $f \cup$ en \mathbb{R} 45.3 $f \cup$ en $(1, +\infty)$; $f \cap$ en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 1)$.

45.5 $f \cup$ en $(1, 2 + \sqrt{2})$; $f \cap$ en $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$

47 $a = \frac{3}{4}$, $b = 0$, $c = -\frac{9}{4}$, $d = \frac{1}{2}$ 51

53 $\frac{1}{4\pi}$ cm/seg

55 $\frac{65\pi}{12}$ cms/h

57 a) $9 \text{ cm}^3/\text{seg}$, b) $300 \text{ cm}^3/\text{seg}$ 59

$R_2 = R_1$

61 r 63

15m paralelo al rio y 11.25 los lados perpendiculares.

65 6.400 cm^2 67

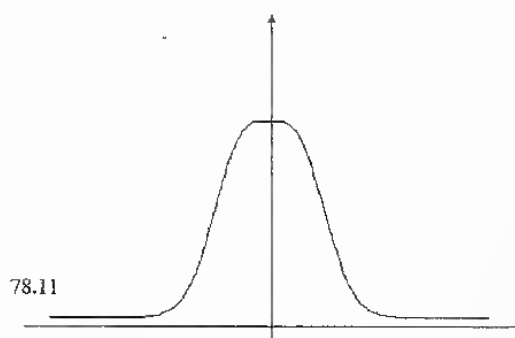
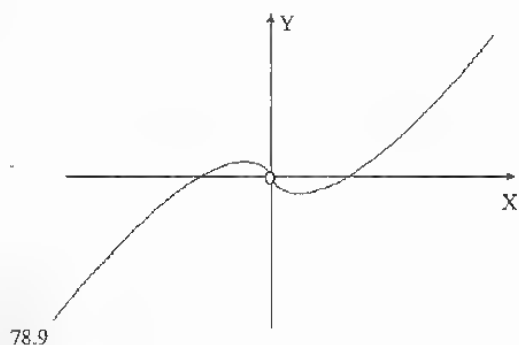
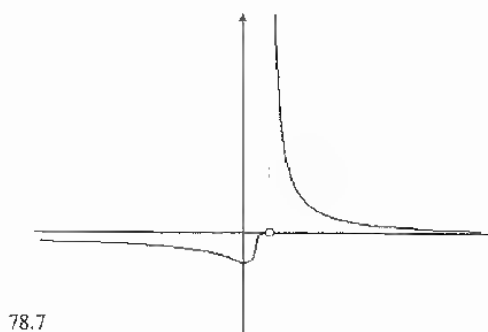
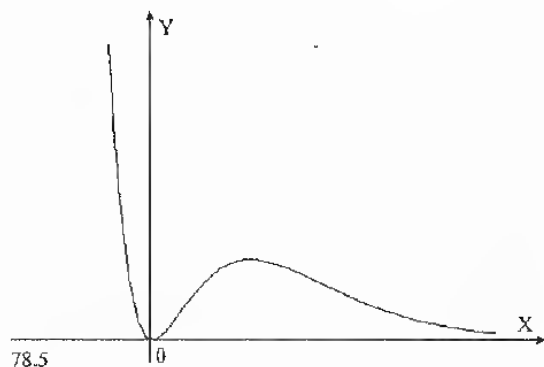
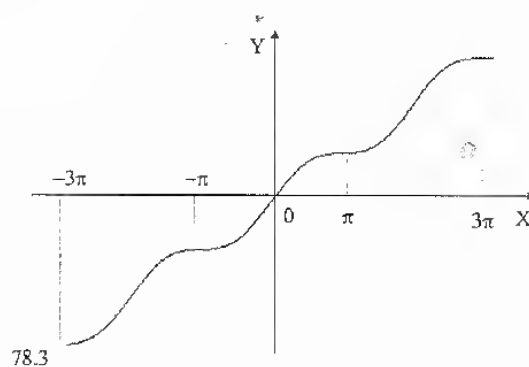
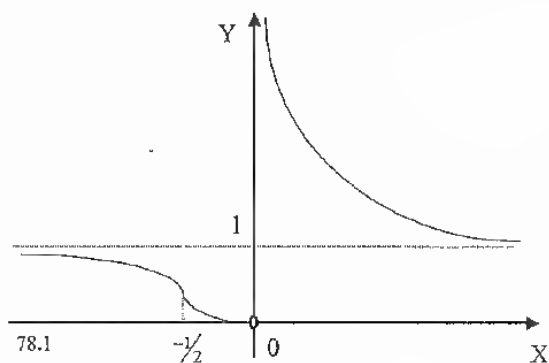
9×18

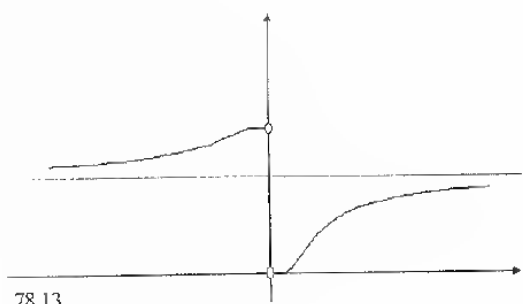
69 ancho $= \frac{d}{\sqrt{3}}$ y alto $= \sqrt{\frac{2}{3}}d$ 71

$\frac{2L}{\sqrt{2}}$

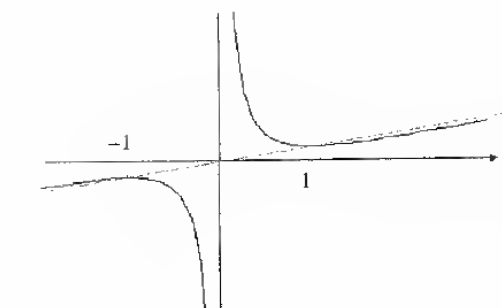
73 Se debe llevar el cable por mar de la central a la isla.

75 2

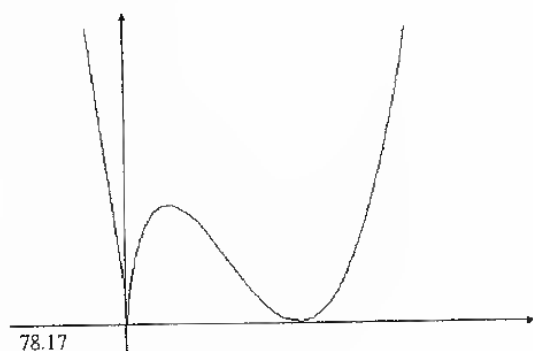




78.13



78.15



78.17

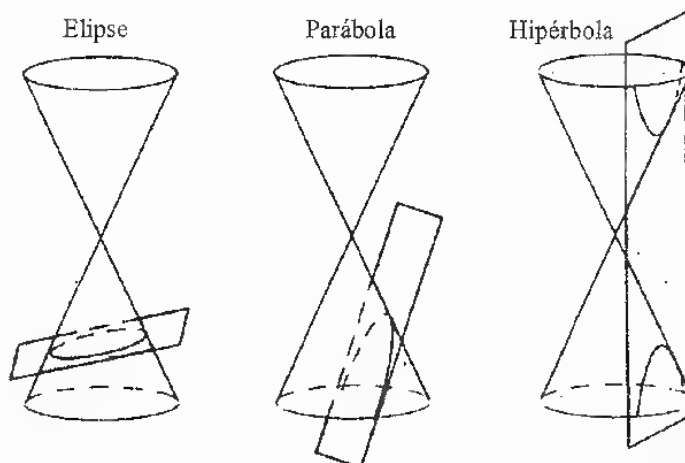
Apéndices



SECCIONES CÓNICAS

Un cono circular recto es el sólido generado por una recta (generatriz) que gira alrededor de un eje fijo formando con este un ángulo constante y que siempre pasa por un punto fijo (vértice del cono).

Al intersectar un plano con el cono, dependiendo de la posición del plano respecto del eje del cono, se obtienen curvas llamadas secciones cónicas: circunferencias, elipses, parábolas, hipérbolas o los casos degenerados que son un punto, una o dos rectas.



No se sabe con exactitud los motivos por los cuales los griegos comenzaron a estudiar las secciones cónicas. En este sentido hay algunas conjeturas, una de ellas es la búsqueda de figuras geométricas con simetrías que proporcionaran estética y belleza a la arquitectura y arte griegos, otra es que entraron en las matemáticas antiguas como método de resolución de problemas geométricos que no admitían construcciones con regla y compás. Los griegos se dedican al estudio de sus propiedades y el interés hacia ellas creció a medida que aumentaba el número de problemas resueltos con su ayuda, por ejemplo se sabe que hacia el siglo IV a. C. Menechme resuelve el problema conocido como “duplicación del cubo” con la asistencia de estas curvas. Apolonio de Pérgamo, que vivió aproximadamente entre los años 260 y 170 a. C., contemporáneo de Arquímedes, escribió el más completo y sistemático tratado teórico de ocho volúmenes acerca de las secciones cónicas, por muchos siglos estas curvas fueron conocidas por “secciones de Apolonio”. A pesar del alto nivel que alcanzó el estudio de las secciones cónicas en la antigüedad, muy lejos estaban de sospechar siquiera el preponderante papel que vendrían a tener tales curvas en el avance de las ciencias físicas, comprensión de la danza astronómica y desarrollo tecnológico, con el consiguiente impacto en el confort del hombre:

Galileo Galilei demostró, siglo XVI, que un cuerpo lanzado al aire sigue una trayectoria parabólica.

Johannes Kepler, en 1609, demostró que los planetas se mueven alrededor del sol en órbitas elípticas, ocupando éste uno de sus focos.

Las propiedades de parábolas, elipses e hipérbolas se usan profusamente en la construcción de pantallas reflectoras y receptoras de señales, en sistemas de navegación y en la determinación de órbitas de satélites artificiales, etc. (Véanse los problemas asociados 6.5, 10 y 11 del capítulo de Aplicaciones).

Los griegos presentan estas curvas en la forma señalada anteriormente, como intersecciones entre el cono y un plano. Luego de la introducción por Descartes (siglo XVII) de un sistema de coordenadas en el plano, se logra, a partir de las propiedades de estas curvas (definiciones que se darán en este texto), relacionar cada una de estas cónicas con una ecuación. Con ellas, cualquier estudiante promedio puede dar la solución en algunas líneas, a los problemas que por ejemplo Arquímedes de Siracusa (siglo III a. C.) resolvió de una forma ingeniosa y larga. Después de 2.000 años, la simplicidad se hizo presente. Aleluya.

A.1 Lugar geométrico

Un lugar geométrico es un subconjunto de puntos del plano. Naturalmente, para que dicho subconjunto esté correctamente determinado es necesario que estemos en capacidad de decidir, para cualquier punto del plano, si pertenece o no al lugar geométrico en estudio. La forma habitual de exhibir un lugar geométrico es mencionando la condición o condiciones que lo determina(n), lo cual puede ser presentado por una definición, una ecuación $r(x,y) = 0$ o una inecuación $r(x,y) < 0$, $r(x,y) \leq 0$, $r(x,y) > 0$, $r(x,y) \geq 0$.

Ejemplo:

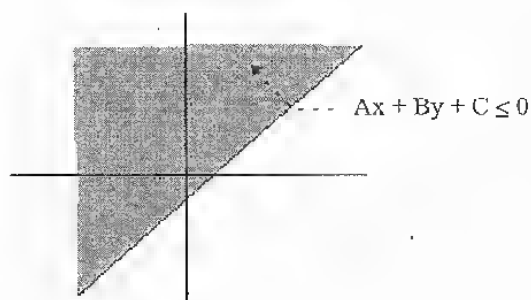
La recta es un conjunto de puntos del plano, por lo tanto, es un lugar geométrico que puede ser presentado, por ejemplo, de las siguientes dos formas:

2.4 Definición de recta

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos (recta mediatriz del segmento que une los dos puntos).

Ecuación de la recta: $Ax + By + C = 0$. Véase su deducción en la página 22.

El lugar geométrico de los puntos del plano que están a un lado de una recta, por ejemplo la región sombreada,

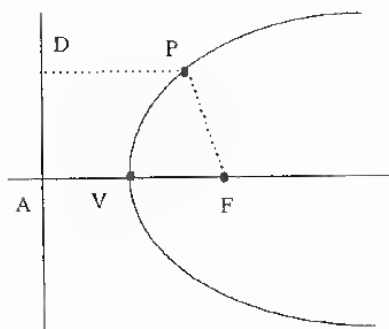


puede ser tipificado por una **inecuación** $Ax + By + C \leq 0$. Cuando el lugar geométrico viene condicionado por una definición, es conveniente deducir, a partir de ella, la ecuación o inecuación correspondiente (relación cartesiana entre las variables x e y). Como se sabe, para chequear si un punto pertenece o no al lugar geométrico es suficiente sustituir en la ecuación o inecuación sus coordenadas para ver si satisfacen o no dicha condición.

A.2 Parábola

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos P del plano que equidistan de una recta fija D (directriz) y de un punto fijo F (foco) del plano que no pertenece a la recta.

La recta que pasa por F perpendicular a D es el eje principal de la parábola. Siendo A el punto intersección entre el eje principal y la directriz, el punto medio V del segmento AF es, por definición, un punto del lugar geométrico y se llama vértice de la parábola.



La ecuación más simple para una parábola se obtiene tomando como foco $F=(p, 0)$ y directriz D de ecuación $x = -p$. Sea $P=(x,y)$ un punto arbitrario del lugar geométrico, por lo tanto por definición tenemos:

$$d(P,D)=d(P,F),$$

o sea $|x+p| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$, que elevando al cuadrado a ambos lados y desarrollando se obtiene:

$$y^2 = 4px$$

que es la ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje

principal OX .

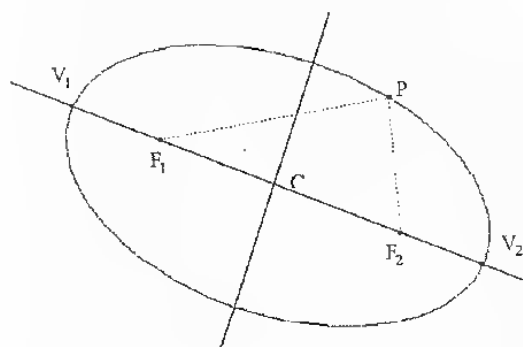
Si tomáramos como directriz la recta de ecuación $y = -p$ y foco el punto $F = (0, p)$, por un procedimiento algebraico similar obtendríamos la ecuación:

$$x^2 = 4py,$$

que representa la parábola con vértice en el origen y eje principal OY . Observe que $|p|$ es la distancia del vértice al foco.

A.3 Elipse

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2 , llamados focos, es una constante mayor que la distancia entre los focos.



La recta que pasa por F_1 y F_2 se llama eje principal de la elipse y las intersecciones V_1 y V_2 del mismo con el lugar geométrico se llaman vértices. El punto medio del segmento $\overline{V_1V_2}$ es el centro de la elipse.

Deduciremos la ecuación más simple de la elipse tomando como focos puntos simétricos respecto del origen y sobre el eje OX . Sean $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ y sea $P = (x, y)$ cualquier punto del lugar geométrico, entonces por definición se tendrá que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

donde $a > c$, observe que la distancia entre los focos es $2c$. La ecuación anterior es equivalente a

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

pasando una de las raíces hacia el lado derecho de la ecuación y elevando al cuadrado se tiene

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2, \quad \text{desarrollando y simplificando resulta}$$

$$cx + a = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \quad \text{Elevando de nuevo al cuadrado y simplificando tenemos}$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

dividiendo por el término $a^2(a^2 - c^2)$, que es positivo, obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Haciendo en ésta $b^2 = a^2 - c^2$ resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde } a > b$$

ecuación de la **elipse con centro en el origen y eje principal OX**.

Intersectando la curva con su eje principal obtenemos los vértices: $V_1 = (a, 0)$ y $V_2 = (-a, 0)$. El segmento $\overline{V_1V_2}$ de longitud $2a$ se llama eje mayor de la elipse. La intersección de la elipse con el eje OY determina los puntos $Q_1 = (0, b)$ y $Q_2 = (0, -b)$ que son los extremos del segmento $\overline{Q_1Q_2}$ de longitud $2b$ que se llamará eje menor de la elipse.

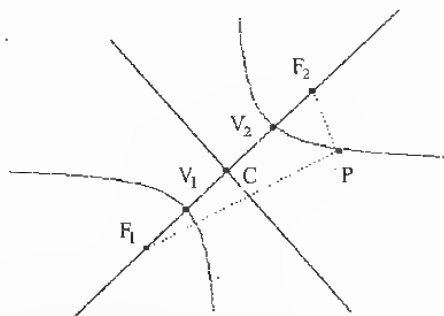
Si tomáramos los focos en los puntos $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$, por una deducción semejante obtendremos,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{con } a > b$$

ecuación de la **elipse con centro en el origen y eje principal OY**.

A.4 Hipérbola

Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2 , llamados focos, es una constante menor que la distancia entre los focos.



También aquí la recta que pasa por F_1 y F_2 se llama eje principal de la hipérbola y las intersecciones V_1 y V_2 del mismo con el lugar geométrico se llaman vértices. El centro C de la hipérbola es el punto medio del segmento $\overline{V_1V_2}$, llamado eje transverso.

Deduciremos la ecuación más simple de la hipérbola tomando como focos puntos simétricos respecto del origen y sobre el eje OX. Sean $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ y $P = (x, y)$ cualquier punto del lugar

geométrico, entonces por definición se tendrá que:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

donde $a < c$, observe que la distancia entre los focos es $2c$. La ecuación anterior es equivalente a las dos que siguen:

$$\text{i) } d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\text{ii) } d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a$$

Nota:

Como $a > 0$; estamos en el caso i) si $d(P, F_1) > d(P, F_2)$, por lo tanto P debe estar sobre la rama izquierda de la hipérbola. Ocurre el caso ii) si $d(P, F_1) < d(P, F_2)$, así P debe estar sobre la rama derecha de la hipérbola.

Después de algunas operaciones similares a las llevadas a cabo para la elipse, las ecuaciones i) y ii) se reducen ambas a

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Haciendo en ésta $b^2 = c^2 - a^2$, resulta dividiendo la ecuación por a^2b^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que representa la **hipérbola de centro en el origen y eje principal el eje OX**.

Intersectando la curva con su eje principal obtenemos los vértices: $V_1 = (a, 0)$ y $V_2 = (-a, 0)$. Los puntos $Q_1 = (0, b)$ y $Q_2 = (0, -b)$ se definen como los extremos del eje conjugado de la hipérbola que es el segmento $\overline{Q_1 Q_2}$.

La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ es una relación en el plano que origina dos funciones a saber:

$$f_1(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

usando las técnicas de trazado de gráficos de funciones se deduce que f_1 y f_2 tienen como asíntotas las rectas:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x,$$

y por ende se llaman asíntotas de la hipérbola.

Si tomáramos los focos como $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$ por un proceso similar, se deduciría la ecuación:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1},$$

que representa la hipérbola de centro en el origen y eje principal coincide con el eje OY.

A.5 Excentricidad

Hay un elemento asociado con las cónicas que es la excentricidad, el cuál proviene de la definición de las mismas como curvas obtenidas al intersectar un plano con el cono circular recto. Para más detalles de lo anterior, consulte por ejemplo [15] página 233.

La excentricidad se denota con la letra e y se tiene:

Para la parábola $e = 1$

Para la elipse e hipérbola $e = \frac{c}{a}$.

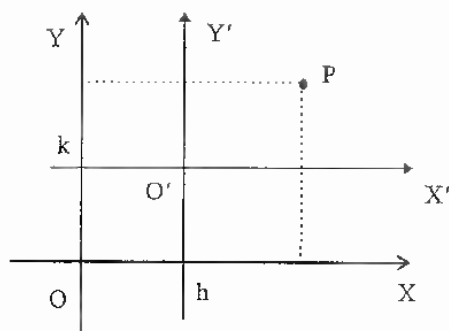
En la elipse $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ por ser $c < a$.

En la hipérbola $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$ por ser $c > a$.

A.6 Traslación de ejes

Todas las ecuaciones obtenidas antes para la parábola, elipse e hipérbola se llaman ecuaciones canónicas, debido a su simplicidad, y corresponden a casos muy especiales. Variando para la parábola la directriz y el foco, para la elipse e hipérbola los focos, se obtienen otras ecuaciones distintas. Cuando la curva se traslada paralelamente a los ejes de coordenadas se puede encontrar su ecuación usando traslación de ejes.

Designemos con X, Y los ejes de un sistema de coordenadas cartesiano (llamado sistema antiguo). Por el punto $O' = (h, k)$ trazamos un sistema nuevo de coordenadas cartesiano con ejes X', Y' de forma que $X' \parallel X$ e $Y' \parallel Y$.



Si las coordenadas de P son (x, y) y (x', y') respecto del sistema antiguo y nuevo, respectivamente, las ecuaciones que relacionan los dos sistemas son:

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k$$

que se llaman **ecuaciones de traslación**.

La ecuación $(y')^2 = 4px'$ representa en el sistema de coordenadas $X'Y'$, una parábola con vértice en el origen y eje principal el eje OX' . Si el origen $O' = (0,0)$ tiene en el sistema XY coordenadas $O' = (h, k)$ entonces, repetimos, las

ecuaciones que relacionan ambos sistemas son:

$$x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

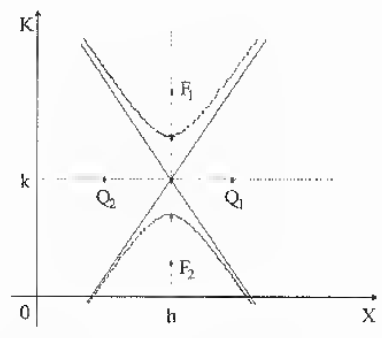
Obtenemos la ecuación de la cónica respecto del sistema XY sustituyendo las ecuaciones anteriores en $(y')^2 = 4px'$. Para obtener la directriz y el eje principal de la cónica respecto del sistema XY se hace la misma sustitución, para el foco y el vértice se sustituyen en las ecuaciones de traslación las coordenadas del sistema $X'Y'$:

	Sistema $X'Y'$	Sistema XY
Ecuación	$(y')^2 = 4px'$	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
Directriz	$x' = -p$	$x = -p + h$
Eje principal	$y' = 0$	$y = k$
Vértice	$(0, 0)$	(h, k)
Foco	$(0, p)$	$(h + p, k)$

Con las demás cónicas se trabaja en forma idéntica para obtener la siguiente tabla:

Gráfico	Ecuación	Elementos
	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ $p > 0$	Vértice $V = (h, k)$ Foco $F = (h + p, k)$ Directriz $x = -p + h$ Eje principal $y = k$
	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ $p < 0$	Vértice $V = (h, k)$ Foco $F = (h + p, k)$ Directriz $x = -p + h$ Eje principal $y = k$

	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $p > 0$	Vértice $V=(h, k)$ Foco $F=(h, k+p)$ Directriz $y = -p + k$ Eje principal $x = h$
	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $p < 0$	Vértice $V=(h, k)$ Foco $F=(h, k+p)$ Directriz $y = -p + k$ Eje principal $x = h$
	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $c^2 = a^2 - b^2$ $a > b$	Eje principal $y = k$ Centro $C=(h, k)$ Vértices: $V_1 = (h+a, k)$ y $V_2 = (h-a, k)$ Focos: $F_1 = (h+c, k)$ y $F_2 = (h-c, k)$ $Q_1 = (h, k+b)$ y $Q_2 = (h, k-b)$
	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ $c^2 = a^2 - b^2$ $a > b$	Eje principal $x = h$ Centro $C=(h, k)$ Vértices: $V_1 = (h, k+a)$ y $V_2 = (h, k-a)$ Focos: $F_1 = (h, k-c)$ y $F_2 = (h, k+c)$ $Q_1 = (h+b, k)$ y $Q_2 = (h-b, k)$
	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $c^2 = a^2 + b^2$	Eje principal $y = k$ Eje normal $x = h$ Centro $C=(h, k)$ Vértices: $V_1 = (h+a, k)$ y $V_2 = (h-a, k)$ Focos: $F_1 = (h+c, k)$ y $F_2 = (h-c, k)$ $Q_1 = (h, k+b)$ y $Q_2 = (h, k-b)$ Asíntotas: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ $c^2 = a^2 + b^2$	<p>Eje principal $x = h$ Eje normal $y = k$ Centro $C=(h, k)$ Vértices: $V_1 = (h, k + a)$ y $V_2 = (h, k - a)$ Focos: $F_1 = (h, k + c)$ y $F_2 = (h, k - c)$ $Q_1 = (h + b, k)$ y $Q_2 = (h - b, k)$ Asintotas: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$</p>
---	---	---

A.7 Ecuación de 2º grado

Cualesquiera de las ecuaciones anteriores, desarrollando los cuadrados, se pueden escribir como ecuación de segundo grado del tipo

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en donde A, C, D, E, F son constantes.

Recíprocamente, dada una ecuación de segundo grado, con sólo completar cuadrados y comparando con las de la tabla, podemos ver qué tipo de cónica representa y conocer sus elementos.

A.8 Ecuación general de 2º grado

Reproducimos el enunciado del ejercicio resuelto A.2:

“Hallar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias a los puntos $(1, 2)$ y $(4, 5)$ es igual a 5”.

De las definiciones dadas para las cónicas, se observa que el lugar geométrico anterior corresponde a una elipse de focos $F_1 = (1, 2)$ y $F_2 = (4, 5)$. La ecuación resultante en términos de las coordenadas x, y es

$$64x^2 - 72xy + 64y^2 - 68x - 268y + 379 = 0,$$

en la cual no es posible completar cuadrados para compararla con las ecuaciones dadas antes para la elipse, pues contiene el término adicional xy . Podemos decir que la misma es del tipo

$$(A.8.a) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{con } B \neq 0,$$

conocida como ecuación general de 2º grado.

A.8.1 Teorema

La ecuación general de 2º grado A.8.a representa una

- Parábola o alguno de los casos degenerados
- Elipse o alguno de los casos degenerados
- Hipérbola o alguno de los casos degenerados

si el “discriminante” $B^2 - 4AC$ es cero, negativo o positivo, respectivamente.

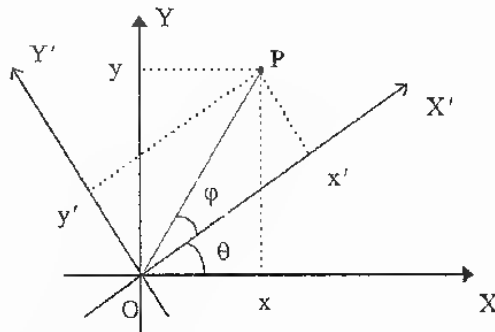
Este teorema permite conocer el tipo de cónica que representa una ecuación de 2º grado cuando $B \neq 0$, pero como no se puede completar cuadrados nos vemos imposibilitados de construir su gráfico y calcular sus elementos; sin embargo, mediante un cambio de coordenadas que geométricamente representa una rotación de ejes

podemos transformar cualquier ecuación general de 2º grado en una del tipo $A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$, donde no aparece el término que impide la completación de cuadrados.

A.8.2 Rotación de ejes

Si los ejes de coordenadas giran un ángulo θ alrededor del origen, y las coordenadas de un punto P son antes de la rotación (x, y) y después (x', y') , entonces las ecuaciones que relacionan el sistema antiguo (XY) con el nuevo $(X'Y')$ son:

$$(A.8.b) \quad \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$



En efecto, rotando el eje X un ángulo θ en sentido antihorario se transforma en el eje X' ; por supuesto, el eje Y gira igual ángulo y se transforma en el eje Y' .

Si $\overline{OP} = r$ entonces $x = r \cos(\theta + \varphi)$, $y = r \sin(\theta + \varphi)$

y $x' = r \cos \varphi$, $y' = r \sin \varphi$,

desarrollando y sustituyendo tenemos:

$$x = r \cos \varphi \cos \theta - r \sin \varphi \sin \theta = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = r \sin \varphi \cos \theta + r \cos \varphi \sin \theta = y' \cos \theta + x' \sin \theta$$

A.8.3 Teorema

La ecuación general de 2º grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{con } B \neq 0,$$

se transforma mediante las ecuaciones A.8.b en

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

siempre que el ángulo de rotación sea tal que $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} \text{ si } A \neq C} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{4} \text{ si } A = C},$$

donde

$$A' = A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta$$

$$C' = A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta$$

$$D' = D \cos \theta + E \sin \theta$$

$$E' = E \cos \theta - D \sin \theta$$

$$F' = F$$

Notas:

1) Desde el punto de vista geométrico, eligiendo el ángulo de rotación de la forma anterior, se hace coincidir uno de los ejes de coordenadas del sistema $X'Y'$ con el eje principal de la cónica, o bien que sean paralelos.

2) Para calcular $\sin \theta$ y $\cos \theta$ se puede usar las siguientes fórmulas:

$$\cos 2\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\theta + 1}}, \quad \text{como } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \underline{\cos 2\theta \text{ tiene el mismo signo de } \operatorname{tg} 2\theta}.$$

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \quad y \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}.$$

EJERCICIOS RESUELTOS

A.1 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta R de ecuación $x = 3$ y del punto $(-4, 1)$.

El lugar geométrico corresponde a la definición de una parábola con directriz $x = 3$ y foco $F = (-4, 1)$.
Sea P de coordenadas (x, y) un punto arbitrario de dicho lugar geométrico, por lo tanto $d(P, R) = d(P, F)$, o sea

$$|x - 3| = \sqrt{(x + 4)^2 + (y - 1)^2},$$

elevando al cuadrado y simplificando resulta $-14x - 7 = (y - 1)^2$,

o bien $(y - 1)^2 = -14\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

La ecuación corresponde a una parábola con vértice en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, eje principal $y = 1$, se abre hacia la izquierda, ya que $p = -\frac{14}{4} < 0$.



A.2 Hallar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias a los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, 5)$ es igual a 5.

Sea P de coordenadas (x, y) un punto de tal lugar geométrico. La definición corresponde a una elipse de focos $F_1 = (1, 2)$ y $F_2 = (4, 5)$, deduzcamos su ecuación:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 5,$$

o sea $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2} = 5,$

despejamos una de las raíces $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = 5 - \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2},$

elevamos al cuadrado $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25 - 10\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2} + (x - 4)^2 + (y - 5)^2,$

desarrollamos los cuadrados y simplificamos para obtener

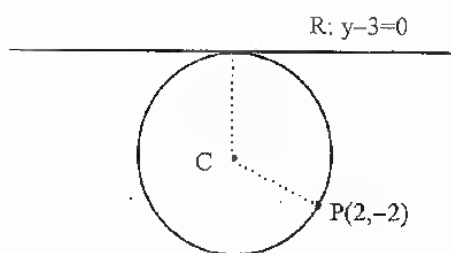
$$6x + 6y - 61 = -10\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2},$$

elevamos al cuadrado de nuevo y agrupamos términos para obtener la ecuación de la elipse:

$$64x^2 - 72xy + 64y^2 - 68x - 268y + 379 = 0.$$



A.3 Encontrar la ecuación e identificar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el punto $(2, -2)$ y son tangentes a la recta $y = 3$.



Sea C el centro de las circunferencias con coordenadas (x, y) . Los puntos C del lugar geométrico deben satisfacer la ecuación $d(C, R) = d(C, P)$ o sea:

$$\begin{aligned} |y - 3| &= \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2}, \\ y^2 - 6y + 9 &= (x - 2)^2 + y^2 + 4y + 4, \\ (x - 2)^2 &= -10\left(y - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

que representa una parábola con vértice $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.



A.4 Demuestre que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola a sus asíntotas es constante.

El problema no pierde generalidad si trabajamos con la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, cuyas asíntotas son:

$A_1: bx - ay = 0$ y $A_2: bx + ay = 0$. Sea $P(x_0, y_0)$ sobre la hipérbola, luego $b^2x_0 - a^2y_0 = a^2b^2$.

$$d(P, A_1) \cdot d(P, A_2) = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \quad (\text{constante}).$$



A.5 Identificar la cónica dada por la ecuación $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 21 = 0$ y dar sus elementos.

Completemos cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 - 9 - 4(y^2 - 4y + 4 - 4) &= 21 \\ (x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 &= 14 \\ \frac{(x + 3)^2}{14} - \frac{(y - 2)^2}{\frac{7}{2}} &= 1 \end{aligned}$$

la ecuación representa una hipérbola con centro en $(-3, 2)$ y eje principal paralelo al eje OX ; (recordar que c es la distancia del centro a los focos y a la distancia del centro a los vértices)

$$a = \sqrt{14} \quad y \quad b = \sqrt{\frac{7}{2}} \quad \text{luego} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{14 + \frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{70}}{2}.$$

$$\text{Focos: } (-3 + c, 2) = \left(-3 + \frac{\sqrt{70}}{2}, 2\right) \quad y \quad (-3 - c, 2) = \left(-3 - \frac{\sqrt{70}}{2}, 2\right).$$

$$\text{Vértices: } (-3 + a, 2) = \left(-3 + \sqrt{14}, 2\right) \quad y \quad (-3 - a, 2) = \left(-3 - \sqrt{14}, 2\right).$$

$$\text{Asíntotas: } y - 2 = \pm \frac{b}{a}(x + 3) \quad \text{o sea} \quad y - 2 = \pm \frac{1}{2}(x + 3).$$



A.6 Dar la ecuación de la hipérbola con un foco en $(2, 5)$ y asíntotas las rectas $x - y - 1 = 0$ y $x + y - 3 = 0$.

El centro es el punto intersección de las asíntotas:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}, \quad \text{cuya solución es } (2, 1).$$

Uno de los focos es (2,5), luego su eje principal es $x = 2$ y su ecuación es de la forma $\frac{(y-1)^2}{a^2} - \frac{(x-2)^2}{b^2} = 1$. La distancia del centro al foco es 4 luego $c=4$, por lo tanto $a^2 + b^2 = 16$. Las asíntotas de la forma $y-1 = \pm \frac{a}{b}(x-2)$, por comparación se tiene $\frac{a}{b} = 1$. La solución del sistema para a y b es $a = b = \sqrt{8}$. La hipérbola tendrá ecuación $(y-1)^2 - (x-2)^2 = 8$.



A.7 La tierra se mueve en una órbita elíptica con el sol en uno de sus focos. Si la excentricidad de la órbita es 0.02 y el eje mayor mide aproximadamente 300 millones de kms, hallar la máxima (afelio) y la mínima (perihelio) distancia entre la tierra y el sol.

La longitud del eje mayor es $2a = 300 \cdot 10^6$ de donde $a = 150 \cdot 10^6$. La excentricidad para la elipse es $e = \frac{c}{a} = 2 \cdot 10^{-2}$ de donde $c = 300 \cdot 10^4$.

Afelio: $a + c = 150 \cdot 10^6 + 300 \cdot 10^4 = 15.300 \cdot 10^4$ kms.

Perihelio: $a - c = 150 \cdot 10^6 - 300 \cdot 10^4 = 14.700 \cdot 10^4$ kms.



Ecuación general de 2º grado. Rotación de ejes.

A.8 Dada la ecuación $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 + \sqrt{3}x + y - 144 = 0$, mediante una rotación de ejes transformarla en una del tipo $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$. Construir su gráfico donde se indiquen los ejes de coordenadas usados.

$B^2 - 4AC = (10\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 31 \cdot 21 < 0$, por lo tanto representa una elipse o alguno de sus casos degenerados.

Para suprimir el término xy , rotamos los ejes un ángulo θ tal que

$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C} = \sqrt{3}$ de donde $2\theta = \frac{\pi}{3}$ o sea $\theta = \frac{\pi}{6}$, sustituimos este valor para hallar los coeficientes de la nueva ecuación:

$$A' = 31 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + 10\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 21 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 36$$

$$C' = 31 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 10\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 21 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 16$$

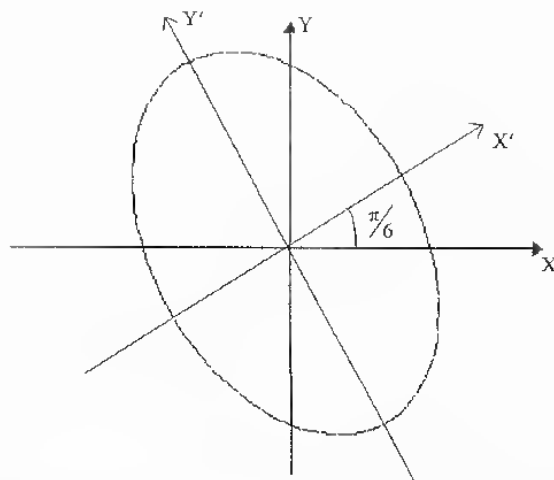
$$D' = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$$

$$E' = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$F' = -144,$$

$$36x'^2 + 16y'^2 + 2x' - 144 = 0,$$

completando cuadrados resulta $\frac{\left(x' + \frac{1}{36}\right)^2}{\frac{5.185}{1.296}} + \frac{y'^2}{\frac{5.185}{576}} = 1$, su gráfico es el siguiente:



A.9 Deducir el tipo de cónica representada por la ecuación $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 56x - 58y - 95 = 0$. Dar sus elementos respecto del sistema XY.

Para conocer el tipo de cónica basta saber cuál es el signo del discriminante $B^2 - 4AC = 400 > 0$, por lo tanto, representa una hipérbola o dos rectas que se cruzan.

El ángulo de rotación viene dado por $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{24}{7}$. Se tiene que $\cos 2\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\theta + 1}} = \frac{7}{25}$,

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Nuevos coeficientes:

$$\begin{array}{ll} A' = -5 & D' = 10 \\ B' = 0 & E' = -80 \\ C' = 20 & F' = -95, \end{array}$$

luego, la ecuación en el sistema $X'Y'$ es

$$-5x'^2 + 20y'^2 + 10x' - 80y' - 95 = 0,$$

completando cuadrados obtenemos

$$\frac{(y' - 2)^2}{\frac{17}{2}} - \frac{(x' - 1)^2}{34} = 1,$$

$$a = \sqrt{\frac{17}{2}}, \quad b = \sqrt{34}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{85}{2}}.$$

Los elementos de la cónica respecto de este sistema serán:

Centro: $(1, 2)$

Eje Principal: $x' = -1$

Vértices: $\left(1, 2 + \sqrt{\frac{17}{2}}\right)$ y $\left(1, 2 - \sqrt{\frac{17}{2}}\right)$

Focos: $\left(1, 2 + \sqrt{\frac{85}{2}}\right)$ y $\left(1, 2 - \sqrt{\frac{85}{2}}\right)$

Asíntotas: $y' - 2 = \pm \frac{1}{4}(x' - 1).$

Deducción de los elementos de la cónica respecto del sistema XY:

Sustituyendo $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$ y $\cos \theta = \frac{4}{5}$ en las ecuaciones A.8.b obtenemos la relación entre las coordenadas $X'Y'$ y XY:

$$x = \frac{1}{5}(4x' - 3y')$$

$$y = \frac{1}{5}(3x' + 4y')$$

Las coordenadas (1,2) del centro respecto de $X'Y'$ se sustituyen en las ecuaciones anteriores para obtener el punto $\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ que son las coordenadas del centro respecto del sistema XY . Se procede en forma similar para deducir:

$$\text{Vértices:} \quad \left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}, \frac{11}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}\right) \text{ y } \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}, \frac{11}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}\right)$$

$$\text{Focos:} \quad \left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{\frac{85}{2}}, \frac{11}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{85}{2}}\right) \text{ y } \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{85}{2}}, \frac{11}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{\frac{85}{2}}\right)$$

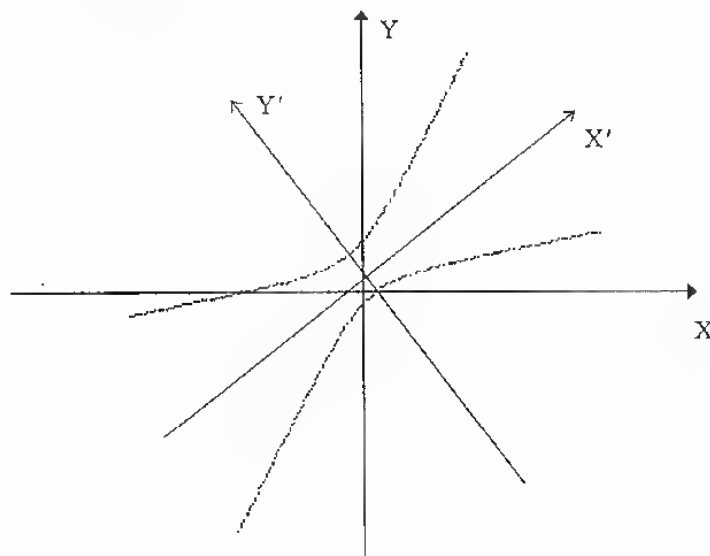
De las mismas ecuaciones anteriores se deduce que:

$$x' = \frac{1}{5}(4x + 3y) \quad ; \quad y' = \frac{1}{5}(-3x + 4y),$$

sustituyendo éstas en las ecuaciones anteriores para las asíntotas se obtiene las ecuaciones de éstas respecto del sistema XY :

$$16x - 13y + 35 = 0 \quad \text{y} \quad 8x - 19y + 45 = 0.$$

El gráfico de la hipérbola es el que sigue:



EJERCICIOS PARA SER RESUELTOS POR EL ESTUDIANTE

1.- Hallar la ecuación de los siguientes lugares geométricos:

- 1.1 Los puntos que equidistan de la recta $y = -1$ y del punto $(0, -3)$.
- 1.2 Los puntos tales que la suma de las distancias a los puntos $(4, -1)$ y $(3, -1)$ es igual a 6.
- 1.3 Los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a los puntos $(2, 5)$ y $(2, 1)$ es igual a 3.
- 1.4 Los puntos que equidistan de la recta $x = 2$ y del punto $(k, 0)$ con $k=0, 3, 6$. Grafique en un mismo sistema de coordenadas las tres curvas.
- 1.5 Los puntos tales que la suma de las distancias a los puntos $(3, 5)$ y $(3, 8)$ es igual a 0, 3, 6.

1.6 Los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a los puntos $(2, 4)$ y $(-1, 4)$ es igual a 1, 3, 7.

1.7 Los puntos que equidistan de la recta $2x + y + 1 = 0$ y del punto $(1, 1)$.

2.- Construya el gráfico de las cónicas dadas por las siguientes ecuaciones (Represente en él todos sus elementos):

2.1 $y - 2 = 4(x + 1)^2$

2.2 $(y + 1)^2 = 8(x - 1)$

2.3 $3(x - 3)^2 + 4(y + 1)^2 = 12$

2.4 $4(x - 3)^2 + 3(y + 1)^2 = 12$

2.5 $25x^2 - 36y^2 = 1$

2.6 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = 4$

3.- Dar la ecuación de las siguientes curvas:

3.1 Los vértices de una elipse son los puntos $(0, 6)$, $(0, -6)$ y sus focos los puntos $(0, 4)$, $(0, -4)$.

3.2 Los vértices de una hipérbola son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y su eje conjugado tiene longitud 6.

3.3 Una parábola tiene como directriz la recta $x = 2$ y foco el punto $(-3, 4)$.

3.4 Una parábola tiene directriz la recta $y = 3$ y vértice el punto $(-1, -2)$.

3.5 Una elipse tiene centro en $(2, 4)$, vértice en $(-2, 4)$ y foco en $(-1, 4)$.

3.6 Una hipérbola tiene foco en $(26, 0)$ y sus asíntotas son las rectas $12y = \pm 5x$.

3.7 Una parábola tiene como eje de simetría paralelo al eje OX, pasa por los puntos $(0, 1)$, $(3, 2)$, y $(1, 3)$.

3.8 Una elipse tiene centro en $(1, -4)$, un vértice en $(1, 1)$ y pasa por $(2, -1)$.

3.9 Una hipérbola tiene vértices en $(-3, 1)$ y $(5, 1)$ y pasa por $(-56, 3)$.

4.- Identificar las cónicas dadas por las siguientes ecuaciones (Construir su gráfico donde indique sus elementos):

4.1 $y^2 = 64x$

4.2 $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

4.3 $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$

4.4 $y = 2x^2 + x + 1$

4.5 $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$

4.6 $x^2 - 4y^2 - 2x = 0$

4.7 $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y - 17 = 0$

4.8 $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0$

4.9 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6 = 0$

4.10 $y^2 + 10y + 3x = 0$

5.- Determine e identifique el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias a las rectas de ecuaciones $y = x$ e $y = -x$ sea constante e igual a 2. ¿Puede usted anticipar la respuesta?

6.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y + 4 = 0$ sea igual a dos tercios de su distancia al punto $(3, 2)$. Identifique el lugar geométrico.

7.- Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $x - 2 = 0$ es siempre 3 unidades mayor que su distancia al punto $(-1, -3)$.

8.- Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de sus distancias al punto $(4, 3)$ y a la recta $x = 16$ es $\frac{1}{2}$.

9.- Demuestre que si A y C son del mismo signo, la ecuación de 2º grado $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una elipse de eje principal paralelo a los ejes de coordenadas, un punto o no representa ningún lugar geométrico real.

Ecuación general de 2º grado (rotación de ejes)

10.- Demostrar que el discriminante $B^2 - 4AC$ es invariante por rotación.

11.-Dadas las siguientes ecuaciones:

$$11.1 \quad xy=1$$

$$11.2 \quad 31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$$

$$11.3 \quad 3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$$

$$11.4 \quad 17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$$

$$11.5 \quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0,$$

a) Reducir a una ecuación de 2º grado sin en el término xy.

b) Dar todos sus elementos y construir su gráfico donde se señalen los sistemas de coordenadas usados.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS IMPARES

$$1.1 \quad x^2 = -4(y+3) \qquad 1.3 \quad \frac{4(y-3)^2}{9} - \frac{4(x-2)}{7} = 1$$

1.5 $k=0$ El lugar geométrico es vacío
 $k=3$ El segmento que une los puntos (3,5) y (3,8).

$$k=6 \quad \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{9} + \frac{4(x-3)^2}{25} = 1$$

$$1.7 \quad x^2 - 4xy + 4y^2 - 14x - 12y + 4 = 0, \text{ parábola cuyo eje principal es la recta } -x + 2y - 1 = 0.$$

$$3.1 \quad \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{20} = 1 \qquad 3.3 \quad (y-4)^2 = -10\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$3.5 \quad \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{7} = 1 \qquad 3.7 \quad \left(y - \frac{21}{10}\right)^2 = -\frac{2}{5}\left(x - \frac{121}{40}\right)$$

$$3.9 \quad \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{3233(y-1)^2}{64} = 1$$

$$5 \quad x^2 - y^2 = 4, \quad y^2 - x^2 = 4 \quad (\text{Dos hipérbolas equiláteras})$$

$$7 \quad (y+3)^2 = -12\left(x + \frac{4}{3}\right), \quad y=-3 \quad (\text{Una parábola y su eje principal})$$



DEMOSTRACIONES

4.2 Teorema (Unicidad)

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$.

Prueba

Supongamos que:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ entonces $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_1 > 0) (\forall x \in D(f)) (0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon/2)$

y

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$ entonces $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_2 > 0) (\forall x \in D(f)) (0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon/2)$.

Por lo tanto para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x \in D$ tenemos

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

luego, $L_1 - L_2 = 0$, o sea $L_1 = L_2$.

4.3 Teorema (Algebra de límites)

Sean f y g funciones tales que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}$)

entonces:

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ con $L_2 \neq 0$

Prueba

i) (Suma algebraica)

Por hipótesis tenemos que:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ entonces $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_1 > 0) (\forall x \in D(f)) (0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon/2)$

y

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ entonces $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_2 > 0) (\forall x \in D(g)) (0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon/2)$.

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, siendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ si $x \in D = D(f) \cap D(g)$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
|f(x) \pm g(x) - (L_1 \pm L_2)| &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

$$\text{luego } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2.$$

ii) (Producto)

Queremos probar que:

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D) (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot L_2| < \varepsilon)$ donde D es la intersección de los dominios de f y g .

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Puesto que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existen y son iguales respectivamente a L_1 y L_2 tenemos:

a) Existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2(1+|L_2|)}$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta_1$.

b) Existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2(1+|L_1|)}$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

c) Existe $\delta_3 > 0$ tal que $|g(x) - L_2| < 1$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta_3$ y así tenemos $|g(x)| = |g(x) - L_2 + L_2| \leq |L_2| + |g(x) - L_2| < |L_2| + 1$.

$$\begin{aligned}
|f(x) \cdot g(x) - L_1 L_2| &= |f(x) \cdot g(x) - L_1 g(x) + L_1 g(x) - L_1 L_2| \\
&= |g(x)(f(x) - L_1) + L_1(g(x) - L_2)| \\
&\leq |g(x)| |f(x) - L_1| + |L_1| |g(x) - L_2| \\
&< (1 + |L_2|) \frac{\varepsilon}{2(1 + |L_2|)} + |L_1| \frac{\varepsilon}{2(1 + |L_1|)} \\
&= \varepsilon \left(\frac{1 + 2L_1}{2 + 2L_2} \right) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$ con $x \in D$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2.$$

iii) Cociente

Si $L_2 \neq 0$, queremos probar que:

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D) \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2} \right| < \varepsilon \right)$ donde D es la intersección de los dominios de f

y g .

a) Puesto que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, dado $\varepsilon = |L_2| - M > 0$ con $M > 0$, $L_2 \neq 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$||g(x)| - |L_2|| \leq |g(x) - L_2| < |L_2| - M \text{ o equivalentemente } M - |L_2| < |g(x)| - |L_2| < |L_2| - M,$$

de donde $0 < M < |g(x)| < 2|L_2| - M$ siempre que $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Bajo estas condiciones

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{M}.$$

b) Existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} M$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$ y $x \in D$.

c) Existe $\delta_3 > 0$ tal que $|g(x) - L_2| < \frac{|L_2| M \varepsilon}{2|L_1|}$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta_3$, $x \in D$ y $L_1 \neq 0$.

Si $L_1 = 0$, dado $\varepsilon > 0$ siendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y $x \in D$ tenemos que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2} \right| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{1}{|g(x)|} \cdot |f(x)| < \frac{1}{M} \cdot \frac{M\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Si $L_1 \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$ siendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y $x \in D$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2} \right| &= \left| \frac{L_2 f(x) - L_1 g(x)}{L_2 g(x)} \right| = \frac{|L_2 f(x) - L_1 L_2 + L_1 L_2 - L_1 g(x)|}{|L_2 g(x)|} \\ &\leq \frac{1}{|g(x)|} \cdot |f(x) - L_1| + \frac{|L_1|}{|L_2 g(x)|} |L_2 - g(x)| \\ &< \frac{1}{M} \cdot \frac{M\varepsilon}{2} + \frac{|L_1|}{|L_2| M} \cdot \frac{|L_2| M \varepsilon}{2|L_1|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

4.7 Teorema

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ si y sólo si existen los límites laterales y además $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Prueba

Es obvio que si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ entonces existen los límites laterales y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

a) Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ se tiene que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in D$ y $x_0 < x < x_0 + \delta_1$ entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon,$$

b) Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ se tiene que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in D$ y $x_0 - \delta_2 < x < x_0$ entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Siendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y $x \in D$ tenemos que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$, esto es $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

4.8 Teorema (Del sandwich)

Sean f , g , h funciones tales que $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ con $a > 0$, y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Prueba

Por hipótesis tenemos que dado $\varepsilon > 0$

a) existe $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta_1$ entonces $-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$,

y

b) existe $\delta_2(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta_2$ entonces $-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$,

también $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, de donde $g(x) - L \leq f(x) - L \leq h(x) - L \quad \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)$.

Siendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, a\}$ si $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ tenemos de a) y b) que

$$-\varepsilon < g(x) - L \leq f(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon,$$

es decir, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

4.12 Teorema

Si f es una función creciente y acotada superiormente por el número M entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ donde $L \leq M$.

Prueba

Consideremos el conjunto $R(f)$, rango de f , que está acotado superiormente por M , luego $R(f)$ tiene una cota superior mínima (supremo), digamos que es $L \leq M$, por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ existe $z \in D(f)$ tal que $L - f(z) < \varepsilon$. Puesto que f es creciente para cada $x \in D(f)$ con $x > z$ tenemos $f(x) > f(z)$ de modo que $L - f(x) < L - f(z) < \varepsilon$, con lo cual se concluye que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

4.14 Teorema

Sea f una función con dominio $D(f)$ y $\{x_n\} \subset D(f)$ una sucesión, tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$.

Prueba

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ si y solo si existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in D(f)$ y $|x - x_0| < \delta$. Por otro lado, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ si y sólo si existe $N(\delta) > 0$ tal que $|x_n - x_0| < \delta$ para cada $n > N$. Así podemos garantizar que existe $N = N(\delta(\varepsilon)) > 0$ tal que para cada $n > N$ se tiene $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.

4.19 Teorema

Sean f y g funciones continuas en x_0 , entonces las funciones $f \pm g$, cf , fg , f/g con $g(x_0) \neq 0$, son continuas en x_0 .

Prueba

Es una consecuencia directa de la definición de continuidad y del teorema 4.3.

4.20 Teorema (Límite de la función compuesta)

Si f es continúa en L y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = f(L)$.

Prueba

Recordemos que

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(L)$ si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in D(f \circ g)$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, por hipótesis tenemos

$$a) (\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall y \in D(f))(0 < |y - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(y) - f(L)| < \varepsilon)$$

$$b) (\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in D(g))(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_1).$$

Por lo tanto si $x \in D(f \circ g) \subset D(g)$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ tenemos que $g(x) \in D(f)$ y $|g(x) - L| < \delta_1$, luego $|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$.

4.21 Teorema de los valores intermedios

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua en $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y c es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe, al menos, un número real $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

Prueba

Supongamos $f(a) < f(b)$ y sea c cualquier número tal que $f(a) < c < f(b)$.

Sea $A = \{x \in [a, b] : f(x) < c\}$, $A \neq \emptyset$ ya que $f(a) < c$. $\forall x \in A$ $x \leq b$, por lo tanto b es una cuota superior de A y por el axioma del supremo, A tiene supremo, llamémoslo x_0 . Como $a \in A$ y x_0 es la menor de las cuotas superiores de A tenemos que $a \leq x_0 \leq b$. Probaremos ahora que $f(x_0) = c$:

Supongamos que $f(x_0) \neq c$ entonces tenemos dos posibilidades:

- $f(x_0) > c$, por ser f continua en $[a, b]$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ $f(x) > c$, lo cual contradice el hecho de que x_0 sea el supremo de A , pues $x_0 - \frac{\delta}{2}$ resulta ser una cuota superior de A menor que x_0 .
- $f(x_0) < c$, y por ser f continua en $[a, b]$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ $f(x) < c$. Por lo tanto existen puntos de $[a, b]$ a la derecha de x_0 que pertenecen al conjunto A , lo cual contradice que x_0 sea el supremo de A .

La suposición de que $f(x_0) \neq c$ conduce a una contradicción, por lo tanto $f(x_0) = c$ y x_0 no puede ser ni a ni b , luego $x_0 \in (a, b)$.

4.23 Teorema de los valores extremos

Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre $[a, b]$. Esto es, existen números x_1, x_2 en $[a, b]$ tales que :

$$a) f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$b) f(x_2) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Nota:

La demostración de este teorema requiere, entre otros, el manejo de los siguientes conceptos: Cota superior, inferior, supremo e infimo de un conjunto de números reales, vecindad de un punto, punto de acumulación, conjunto cerrado, conjunto compacto, subsucesión.

Se enunciarán en forma fragmentada los resultados previos necesarios:

A)

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

La prueba se puede encontrar en [16] página 91.

B)

D es un conjunto compacto si y solo si cada sucesión de puntos de D contiene una subsucesión convergente a un punto de D.

Prueba:

(\Rightarrow)

Sea $\{x_n\} \subset D$, luego $\{x_n\}$ es una sucesión acotada y así por A) existe una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset D$ convergente, digamos a z . Probemos ahora que $z \in D$:

$\{x_{n_k}\}$ converge a z si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) > 0$ tal que $-\varepsilon + z < x_{n_k} < \varepsilon + z$ siempre que $k > N(\varepsilon)$, o sea que $(-\varepsilon + z, \varepsilon + z) \cap D \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon$, es decir, z es un punto de acumulación de D , que es cerrado, luego $z \in D$.

(\Leftarrow)

Demostremos que D es acotado:

Supongamos que D no es acotado, luego para cada $n > 0$ existe un punto $x_n \in D$ tal que $|x_n| > n$. Por hipótesis, la sucesión de puntos $\{x_n\}$ contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a un punto $z \in D$ y $|x_{n_k}| > n_k$. Para $n_k > 1 + |z|$ se tiene

$$|x_{n_k} - z| \geq |x_{n_k}| - |z| > n_k - |z| > 1,$$

o sea, que $x_{n_k} > 1 + z$ o bien $x_{n_k} < z - 1$, lo cual contradice el hecho de que $\{x_{n_k}\}$ converja a z . La contradicción proviene de suponer que D no es acotado.

Demostremos ahora que D es cerrado:

Siendo z cualquier punto de acumulación de D , debemos probar que $z \in D$.

Si z es un punto de acumulación de D entonces $\left(-\frac{1}{n} + z, z + \frac{1}{n}\right) \cap D \neq \emptyset$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Con los puntos de estas intersecciones no vacías, podemos definir una sucesión $\{x_n\} \subset D$, por hipótesis, ésta contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a un punto de D . Se tiene que

$$-\frac{1}{n} + z < x_{n_k} < z + \frac{1}{n} \quad \text{para cada } n, \quad \text{y de aquí } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} + z\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(z + \frac{1}{n}\right) = z,$$

luego por el teorema del Sandwich y por la unicidad del límite $z \in D$.

C)

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y f es continua en $[a, b]$ entonces el conjunto imagen de f en $[a, b]$, $\text{Im} f$, es compacto.

Prueba:

Sea $\{y_n\}$ una sucesión de puntos en $\text{Im} f$. Para cada entero n , existe $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) = y_n$.

$[a, b]$ es compacto por lo tanto por B) la sucesión $\{x_n\}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a un punto $x \in [a, b]$. Puesto que f es continua en $[a, b]$ sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = f(x).$$

Esto es, $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ es una subsucesión de $\{y_n\}$ que converge a $f(x) \in \text{Img } f$ en $[a, b]$. Así, cualquier, sucesión $\{y_n\}$ de puntos en $\text{Img } f$ en $[a, b]$ tiene una subsucesión que converge a un punto de $\text{Img } f$ en $[a, b]$, por lo tanto, nuevamente por la parte B) $\text{Img } f$ en $[a, b]$ es compacto.

D)

Probemos finalmente el Teorema de los valores extremos.

Como f es continua en $[a, b]$ se tiene por C) que $\text{Img } f$ en $[a, b]$ es un conjunto acotado. Sea L el supremo de $\text{Img } f$ en $[a, b]$, es decir, la menor de las cotas superiores. Por lo tanto, L es un punto de acumulación de $\text{Img } f$ en $[a, b]$, efecto, si así no fuera existiría $\varepsilon > 0$ tal que $\text{Img } f \cap (-\varepsilon + L, L + \varepsilon) = \emptyset$, lo que es equivalente a afirmar que para $M = -\varepsilon + L < L$ se tiene $y < M \quad \forall y \in \text{Img } f$ en $[a, b]$, contradiciendo el hecho de que L sea la menor de las cotas superiores de $\text{Img } f$ en $[a, b]$.

Por ser $\text{Img } f$ en $[a, b]$ un conjunto cerrado contiene todos sus puntos de acumulación, es decir, $L \in \text{Img } f$ en $[a, b]$, por lo tanto existe $x_2 \in [a, b]$ tal que $L = f(x_2)$ y $f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$.

De forma similar, trabajando con el ínfimo, se demuestra que existe $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x) \geq f(x_1) \quad \forall x \in [a, b]$.

5.6 Teorema

Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0 .

Prueba

Demostraremos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$:

Para cada $x \in D(f)$ podemos escribir $f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0)$. Puesto que f es derivable en x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{y así}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

5.7 Algebra de derivadas

Siempre que f y g sean funciones derivables en x tenemos:

Derivada de la suma:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Derivada del producto:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Derivada del cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Prueba

Derivada de la suma:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

Derivada del producto:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

Derivada del cociente:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} + \frac{f(x)g(x+h) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \left[\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) g(x) - f(x+h) \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \right] \frac{1}{g(x+h)g(x)} \right\} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\end{aligned}$$

5.8 Regla de la cadena (Derivada de la función compuesta)

Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ ambas derivables en cada punto de su dominio, entonces también es derivable $y = f(g(x))$ y además

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Prueba

Sea $x \in D(f \circ g)$ cualquiera, por lo tanto $x \in D(g)$.

Queremos demostrar que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$:

Definamos la función $H(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(g(x))}{z - g(x)} - f'(g(x)) & \text{si } z \neq g(x) \\ 0 & \text{si } z = g(x) \end{cases}$. Puesto que la función f es derivable en

cada punto de su dominio es derivable en $z=g(x)$, luego $\lim_{z \rightarrow g(x)} H(z) = 0$, es decir, H es continua en $z=g(x)$, y g también lo es en x . Por lo tanto, el teorema 4.20 nos permite hacer lo siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} H(g(x+h)) = H\left(g\left(\lim_{h \rightarrow 0}(x+h)\right)\right) = H(g(x)) = 0. \quad H(g(x+h)) = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} - f'(g(x))$$

de donde $f(g(x+h)) - f(g(x)) = [H(g(x+h)) + f'(g(x))][g(x+h) - g(x)]$, dividiendo ambos lados de la ecuación por h y tomando límite tendremos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} [H(g(x+h)) + f'(g(x))] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= [H(g(x)) + f'(g(x))] \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

6.3 Teorema

Si f alcanza un valor extremo en x_0 entonces x_0 es un número crítico de f .

Prueba:

Si $f(x_0)$ es un valor extremo y $f'(x_0)$ no existe o bien x_0 es un extremo del dominio, siendo éste un intervalo cerrado entonces por definición x_0 es un número crítico.

Supongamos que $f(x_0)$ es un valor máximo y que $f'(x_0)$ existe. Luego existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 tal que $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in I$:

$$\text{Si } x < x_0 \text{ se tiene } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad \forall x \in I, \quad \text{de donde } f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

$$\text{Si } x > x_0 \text{ se tiene } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad \forall x \in I, \quad \text{de donde } f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Puesto que $f'(x_0)$ existe, se debe tener $f'(x_0) = 0$, luego x_0 es un número crítico.

Si se asume que $f(x_0)$ es un mínimo la demostración es similar.

6.4 Teorema Rolle

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , tal que $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Prueba:

Si f es constante en $[a, b]$ es inmediato que $f'(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$.

Supongamos que f no es constante en $[a, b]$, puesto que es continua en dicho intervalo existe $\zeta \in [a, b]$ tal que $f(\zeta)$ es un valor máximo. Si $\zeta \in (a, b)$ por el teorema 6.3 $f'(\zeta) = 0$. Sea entonces $c = \zeta$. Si $\zeta = a$ o bien $\zeta = b$, como $f(a) = f(b)$ y f no es constante existe $\xi \in (a, b)$ donde f alcanza un valor mínimo; nuevamente por el teorema anterior $f'(\xi) = 0$. Sea entonces $c = \xi$.

6.5 Teorema del Valor Medio (Lagrange)

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Prueba:

Definamos la función $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$, g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $g(b) = g(a) = 0$, luego por el teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, pero $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ de donde $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

6.6 Teorema del Valor Medio Generalizado (Cauchy)

Si f y g son continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) y tal que $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Prueba:

Primero, veremos que $g(b) \neq g(a)$, en efecto, si $g(b) = g(a)$ por el teorema del valor medio existiría $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$, pero por hipótesis $g'(x) \neq 0$ para cada x en (a, b) , la contradicción proviene de suponer $g(b) = g(a)$.

Se define ahora la función $H(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$, la cual es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $H(b) = H(a) = 0$, por lo tanto, existe $c \in (a, b)$ donde $H'(c) = 0$. Pero $H'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$ de donde $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

6.7 Regla de L'Hôpital

Si f y g son funciones derivables en algún intervalo (a, b) que contiene a c , excepto posiblemente en c , $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si éste existe o es infinito.

Prueba:

Consideremos el intervalo $[c, \alpha]$ con $\alpha < b$. Las funciones f y g son continuas en (a, b) excepto posiblemente en c , pero $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, luego las funciones:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } c < x \leq \alpha \\ 0 & \text{si } x = c \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } c < x \leq \alpha \\ 0 & \text{si } x = c \end{cases}$$

son continuas en $[c, \alpha]$ y derivables en (c, α) , luego por el teorema del valor medio generalizado existe $z \in (c, \alpha)$ tal que $\frac{F'(z)}{G'(z)} = \frac{F(\alpha) - F(c)}{G(\alpha) - G(c)}$, pero $F(c) = G(c) = 0$, $F(\alpha) = f(\alpha)$, $G(\alpha) = g(\alpha)$, $F'(z) = f'(z)$ y

$$G'(z) = g'(z), \text{ así } \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}.$$

Cuando α tiende a c^+ , z tiende a c^+ ya que $c < z < \alpha$, por lo tanto $\lim_{\alpha \rightarrow c^+} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \lim_{z \rightarrow c^+} \frac{f'(z)}{g'(z)}$. Se concluye, debido

a que los cálculos son independientes del nombre utilizado para la variable, que $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Similarmente, trabajando en el intervalo $[\alpha, c]$ con $a < \alpha$, se demuestra que $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Si el límite

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe o es infinito se debe tener la igualdad de los límites laterales, por lo cual } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

6.8 Teorema (Criterio de la primera derivada para crecimiento y decrecimiento)

Si f es una función derivable en un intervalo abierto I se tiene:

- i) $f'(x) > 0 \forall x \in I$ entonces si f es creciente en I .
- ii) $f'(x) < 0 \forall x \in I$ entonces si f es decreciente en I .

Prueba:

i)

Sean $f'(x) > 0$ en el intervalo I , x_1 y x_2 dos valores cualesquiera de I , entonces f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2) , por lo tanto, existe $\xi \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Puesto que $f'(\xi) > 0$ y $x_2 > x_1$ resulta $f(x_2) - f(x_1) > 0$, lo que implica que f es una función creciente en I .

ii) la demostración es similar a la anterior.

6.9 Teorema (Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos)

Sea f una función continua en su número crítico x_0 . Derivable en un intervalo abierto I que contiene a x_0 , excepto probablemente en x_0 .

- i) Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) < 0$ a la derecha x_0 entonces $f(x_0)$ es un valor máximo.
- ii) Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) > 0$ a la derecha x_0 entonces $f(x_0)$ es un valor mínimo.
- iii) Si f' no cambia de signo en x_0 entonces $f(x_0)$ no es un valor máximo ni mínimo.

Prueba:

i)

Sea $x < x_0$ cualquiera, de forma que $[x, x_0] \subset I$, f es continua en $[x, x_0]$ y derivable en (x, x_0) , por lo cual $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ para algún $\xi \in (x, x_0)$. Puesto que $f'(\xi) > 0$ se tiene que $f(x) < f(x_0)$ en $[x, x_0]$.

Sea ahora $x > x_0$ cualquiera, de forma que $[x_0, x] \subset I$, f es continua en $[x_0, x]$ y derivable en (x_0, x) , por lo cual $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ para algún $\xi \in (x_0, x)$. Puesto que $f'(\xi) < 0$ implica que $f(x) < f(x_0)$ en $[x_0, x]$.

Se concluye que $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in I$, por lo tanto $f(x_0)$ es un valor máximo.

ii) y iii) Las demostraciones son similares a la anterior.

6.11 Teorema (Criterio de la segunda derivada para concavidad)

- i) $f''(x) > 0 \forall x \in I$ entonces si el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en I .
- ii) $f''(x) < 0 \forall x \in I$ entonces si el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en I .

Prueba:

i)

Sean $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$ puntos arbitrarios del gráfico de f con $x_1, x_2 \in I$ y $x_1 < x_2$. La cuerda que pasa por A y B tiene ecuación:

$$a) y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{o bien} \quad b) y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio al intervalo $[x_1, x_2]$ tenemos que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$. Como $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$ implica que f' es estrictamente creciente en I , por lo cual el valor de c es único, podemos así reescribir la ecuación de la cuerda:

$$a) \ y = f(x_1) + f'(c)(x - x_1) \quad \text{o bien} \quad b) \ y = f(x_2) + f'(c)(x - x_2).$$

Se quiere demostrar que $y(x) > f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$:

Consideremos $x \geq c$ cualquiera, aplicando el Teorema del Valor Medio al intervalo $[x, x_2]$ existe $\xi \in (x, x_2)$ tal

que $f(x) = f(x_2) + f'(\xi)(x - x_2)$. f' es creciente en I y $\xi > c$ luego $f'(\xi) > f'(c)$ de donde se deduce que

$$f(x_2) + f'(\xi)(x - x_2) < f(x_2) + f'(c)(x - x_2),$$

usando b) tenemos $f(x) < y(x)$.

Si consideramos $x < c$ cualquiera y aplicamos el Teorema del Valor Medio al intervalo $[x_1, x]$ deducimos que

$f(x) = f(x_1) + f'(\xi)(x - x_1)$ para algún $\xi \in (x_1, x)$. Como ahora $\xi < c$ se tiene $f'(\xi) < f'(c)$ de donde se deduce

que $f(x_1) + f'(\xi)(x - x_1) < f(x_1) + f'(c)(x - x_1)$, usando a) tenemos $f(x) < y(x)$.

ii)

La demostración es similar a la anterior.

6.12 Teorema

Si $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión y f' es continua en x_0 entonces se tiene una de las siguientes posibilidades:

- i) $f''(x_0) = 0$
- ii) $f''(x_0)$ no existe.

Prueba:

Si $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión del gráfico de f entonces en él se produce un cambio de concavidad; supongamos que es cóncava hacia abajo a la izquierda de x_0 , y cóncava hacia arriba a la derecha de x_0 , por lo tanto, existe un intervalo (α, x_0) donde $f''(x) < 0$ y existe un intervalo (x_0, β) donde $f''(x) > 0$, luego por el teorema 6.9 $f'(x_0)$ es un valor mínimo de f' y por el teorema 6.3 x_0 es un número crítico de f' , es decir, $f''(x_0) = 0$ o bien $f''(x_0)$ no existe.

6.13 Teorema (Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos)

Sea f una función tal que f'' es continua en un intervalo abierto I que contiene a x_0 y que $f'(x_0) = 0$.

- i) Si $f''(x_0) < 0$ entonces $f(x_0)$ es un valor máximo.
- ii) Si $f''(x_0) > 0$ entonces $f(x_0)$ es un valor mínimo.

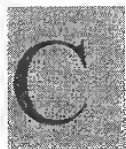
Prueba:

i)

Puesto que $f''(x_0) < 0$ y f'' es continua en un abierto que contiene a x_0 existirá un intervalo abierto V que contiene a x_0 tal que $f''(x) < 0 \quad \forall x \in V$, por lo cual $f'(x)$ decrece en V . Como $f'(x_0) = 0$ se tiene que $f'(x) > 0$ para $x < x_0$ con $x \in V$ y $f'(x) < 0$ para $x > x_0$ con $x \in V$, por lo tanto, f alcanza un valor máximo en x_0 por ser f continua en dicho punto.

ii)

La demostración es similar a la anterior.



CÁLCULO CON MAPLE

En pleno siglo XXI aún se mantienen vivas ciertas voces que, con base en investigaciones pertinentes, argumentan en contra o a favor del uso pedagógico de herramientas computacionales para la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, la realidad se impone; hoy día es casi imposible encontrar alguna tarea de la vida académica que no esté regida por la presencia, casi ineludible, de una computadora.

Existen en el mercado varios paquetes (Matlab, Mathematica, Derive, etc.) para el cálculo matemático. En cuanto a capacidad de cálculo, las diferencias entre ellos no son muy marcadas y unos no presentan mayores ventajas con respecto a otros. Se eligió Maple para este libro debido a su pertinencia para la realización de cálculos simbólicos, lo cual lo convierte en un instrumento de utilidad didáctica.

En este capítulo se presentan apenas las instrucciones más comunes para los contenidos de este libro; para un aprendizaje más completo del uso del paquete el lector puede utilizar [11].

C.1 Operaciones matemáticas

Suma

`> 2+3;`

5

Resta

`> 3-7;`

-4

Multiplicación

`> 4*(-3);`

-12

División

`> 5/4;`

$\frac{5}{4}$

Potenciación

`> 8^2;`

64

`> (x-2)^2;`

$(x-2)^2$

Observe que todas las instrucciones se finalizan con punto y coma (;), y que la última respuesta no está desarrollada sino escrita en forma simbólica.

C.2 Comandos simbólicos

Maple tiene muchos comandos para efectuar operaciones en forma simbólica, presentaremos solamente los más comunes.

`> expand((x-2)^2);`

$$x^2 - 4x + 4$$

> evalf(5/4);

$$1.250000000$$

> convert(45*degrees, radians);

$$\frac{1}{4}\pi$$

Para ver todas las posibilidades de este comando “convert”, entre en el nivel de ayuda de Maple, siguiendo la secuencia:

Help-Topic Search. Escriba “convert” en el cuadro Topic-Ok

> factor(x^2-2*x+1);

$$(x-1)^2$$

C.2.1 Identificación de expresiones matemáticas

Con fines operativos, Maple permite identificar cualquier expresión matemática con un nombre, para lo cual se usan caracteres alfanuméricos. El nombre puede ser suficientemente descriptivo y largo, no deben comenzar con caracteres numéricos y es posible unir varios nombres usando un guión (_), con ellos se puede realizar cualquier tipo de operación válida:

> constante:=4;

$$\text{constante} := 4$$

> 5*constante;

$$20$$

> constante-1/constante;

$$\frac{15}{4}$$

Se puede cambiar el valor de la constante:

> constante:=Pi/constante;

$$\text{constante} := \frac{1}{4}\pi$$

¿Cuál es el valor actual de constante?

> constante;

$$\frac{1}{4}\pi$$

De igual forma, se puede identificar ecuaciones o expresiones matemáticas:

> A:=x^3+3*x=1;

$$A := x^3 + 3x = 1$$

> B:=2/z;

$$B := 2\frac{1}{z}$$

> A*B;

$$2 \frac{x^3 + 3x}{z} = 2 \frac{1}{z}$$

C.2.2 Comando restart

Este comando borra de la memoria todas las variables y paquetes usados hasta el punto de inserción.

> **restart;**

¿Cuál es el valor actual de constante?

> **constante;**

constante

C.3 Funciones reales de una variable real

C.3.1 Algunas de las funciones matemáticas reconocidas por Maple son

Función raíz cuadrada	<i>sqrt()</i>
Función raíz impar	<i>surd(x, 2n+1)</i>
Función valor absoluto	<i>abs()</i>
Funciones trigonométricas	<i>sin()</i> , <i>cos()</i> , <i>tan()</i> , <i>sec()</i> , <i>csc()</i> , <i>cot()</i>
Funciones hiperbólicas	<i>sinh()</i> , <i>cosh()</i> , <i>tanh()</i> , <i>sech()</i> , <i>csch()</i> , <i>coth()</i>
Funciones trigonométricas inversas	<i>arcsin()</i> , <i>arccos()</i> , <i>arctan()</i> , etc
Funciones hiperbólicas inversas	<i>arcsinh()</i> , <i>arccosh()</i> , <i>artanh()</i> , etc
Función exponencial	<i>exp()</i>
Logaritmo natural	<i>ln()</i>
Logaritmo en base b	<i>log[b](.)</i>

Para ver la librería completa de funciones teclee en el grupo de ejecución *?inifen* seguido de *return*, (cambio de línea).

C.3.2 Definición de funciones: comandos flecha, unapply, piecewise

Se puede definir una función usando la notación de flecha (\rightarrow , símbolo menos y mayor que respectivamente).

> **f:=x->sqrt((x+1)/(x-1));**

$$f := x \rightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Otra forma de definir una función, es usar el comando **unapply**:

> **g:=unapply(4*(sin(3*x-1))^2,x);**

$$g := x \rightarrow 4 \sin(3x-1)^2$$

La notación anterior de Maple significa $\sin^2(3x-1)$ tanto en la respuesta como en el grupo de ejecución.

Una **función a trozos** se define combinando la notación de flecha con el comando **piecewise**:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

> **h:=x->piecewise(x<=0,x,x<=1,x^2-1,1+sqrt(x-1));**

$$h := x \rightarrow \text{piecewise}(x \leq 0, x, x \leq 1, x^2 - 1, 1 + \sqrt{x-1})$$

Observe que en el comando, primero va el intervalo y luego cómo se define la función en dicho intervalo; excepto en el último intervalo para el cual solamente se define la función. Obviamente los intervalos se escriben "ordenados" de izquierda a derecha.

C.3.4 Evaluación de funciones: comando evalf

Si la función fue previamente definida, la notación para la evaluación de una función en un punto es la acostumbrada:

```
> f(3), f(-sqrt(6)), f(t^2-1);
```

$$\sqrt{2}, \sqrt{\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+1}}, \sqrt{\frac{t^2}{t^2-2}}$$

```
> g(46/3); h(1/4);
```

$$4 \sin(45)^2$$

$$\frac{-15}{16}$$

Las funciones reconocidas por Maple pueden ser evaluadas directamente, es decir, sin definir las previamente.

```
> ln(3), surd(5,3);
```

$$\ln(3), 5^{(1/3)}$$

Observe que Maple da resultados en forma simbólica (cálculo simbólico). Para obtener **resultados aproximados**, escritos en forma decimal, se usa el comando `evalf` indicando o no el número de dígitos que se quiere:

```
> evalf(ln(3),20); evalf(surd(5,3),3);
```

$$1.0986122886681096914$$

$$1.71$$

Algunos resultados dados por Maple requieren una atención muy especial, como los siguientes:

```
> log[3](9);
```

$$\frac{\ln(9)}{\ln(3)}$$

Maple usa aquí la fórmula de cambio de base: $\log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b}$.

```
> evalf(log[3](9));
```

$$1.999999999$$

El resultado correcto es 2. El error proviene de la conversión automática a logaritmo neperiano *utilizando la fórmula anterior*.

```
> arctan(infinity); coth(infinity);
```

$$\frac{1}{2} \pi$$

$$1$$

Los "resultados" anteriores se entenderán en forma conveniente teniendo en cuenta el concepto de límite. *De ser el caso, los resultados pueden ser complejos:*

```
> f(0); ln(-3);
```

$$I$$

$$\ln(3) + I \pi$$

> evalf(%);

$$1.098612289 + 3.141592654 I$$

Con el símbolo % se hace referencia al último resultado; al penúltimo sería %%, etc.

C.3.5 Álgebra de funciones

Para las operaciones básicas con funciones, suma, resta, multiplicación y división se usa en Maple las notaciones convencionales:

Suma:	$f(x)+g(x)$	<i>o bien</i>	$(f+g)(x)$
Resta:	$f(x)-g(x)$	"	$(f-g)(x)$
Producto:	$f(x)*g(x)$	"	$(f*g)(x)$
Cociente:	$f(x)/g(x)$	"	$(f/g)(x)$
Composición:	$f(g(x))$	"	$(f@g)(x)$

> r:=unapply(x^2+1,x); s:=unapply(2*x-1,x);

$$r := x \rightarrow x^2 + 1$$

$$s := x \rightarrow 2x - 1$$

> r(x)+s(x);

$$x^2 + 2x$$

> r(x)*s(x);

$$(x^2 + 1)(2x - 1)$$

> r(x)/s(x);

$$\frac{x^2 + 1}{2x - 1}$$

> (r@s)(x);

$$(2x - 1)^2 + 1$$

> expand(%);

$$4x^2 - 4x + 2$$

> (s@r)(x);

$$2x^2 + 1$$

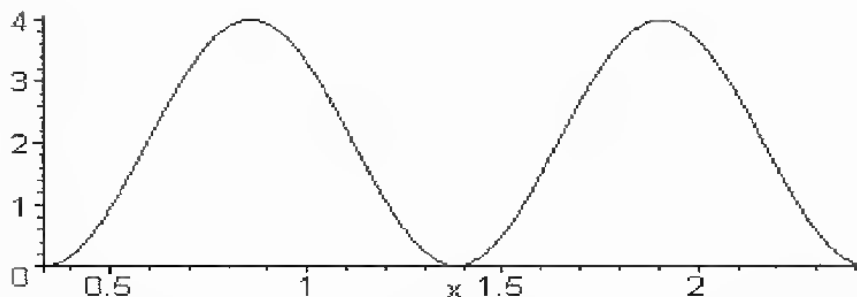
o bien:

> s(r(x));

$$2x^2 + 1$$

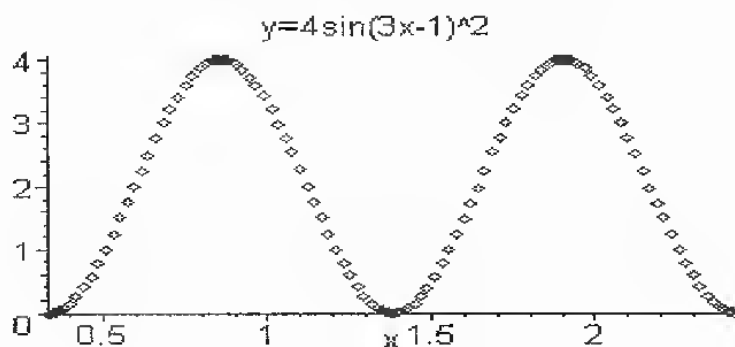
C.3.6 Gráficos de funciones: comandos plot e implicitplot

> plot(4*sin(3*x-1)^2,x=1/3..2*Pi/3+1/3);



Para variar el estilo de presentación de los gráficos, se pueden incluir diversas opciones en el comando. Con el fin de ver las diferentes posibilidades, entre al nivel de ayuda: "Help- Topic Search". Escriba "plot,options" en el recuadro "Topic" y pulse OK.

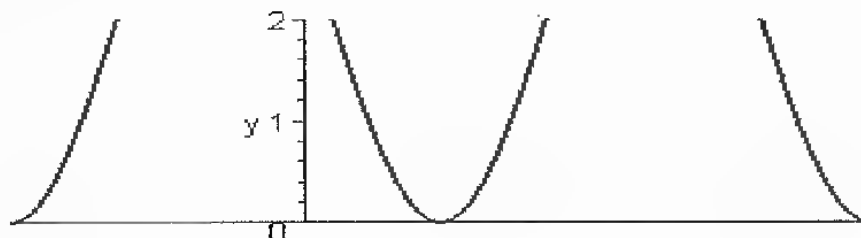
```
>plot(4*sin(3*x-1)^2,x=1/3..2*Pi/3+1/3,title=~y=4sin^2(3x-1)^2~,
titlefont=[COURIER,BOLD,10],thickness=2,style=point,color=black);
```



En el ejemplo anterior se especificó como intervalo horizontal de graficación el intervalo $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{2\pi}{3}\right]$. Si no se especifica el intervalo horizontal, Maple toma el intervalo $-10..10$ por defecto. Como en el ejemplo anterior, si el rango vertical no se especifica, Maple usará el dado por los valores que toma la función.

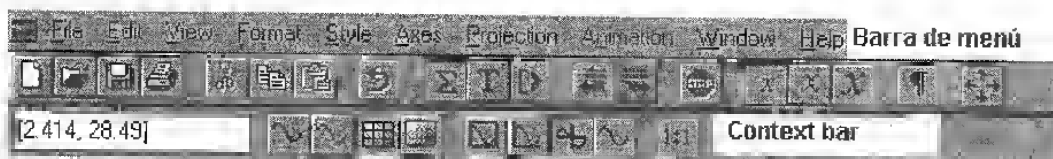
Veremos el gráfico de la misma función anterior cambiando el intervalo horizontal a $\left[\frac{1}{3} - \frac{\pi}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\pi}{3}\right]$, el intervalo vertical a $[0,3]$ y otras opciones.

```
> plot(4*sin(3*x-1)^2,x=1/3-Pi/3..Pi/3+1/3, y=0..2,thickness=2, style=line,
tickmarks=[0,2]);
```




C3.7 Ventana gráfica

Si usted hace click sobre un gráfico aparecerá un marco a su alrededor y una barra gráfica:



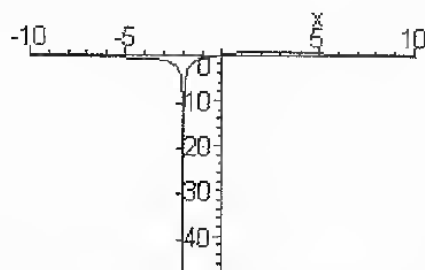
De las opciones que usted puede autodescribir mencionaré dos:

** Si acciona el botón izquierdo del ratón en un punto interior del marco observe que los números del extremo izquierdo de la barra gráfica cambian; esas son las coordenadas del punto.

** Habrá observado que la escala de los gráficos no es uno a uno, pues Maple grafica de acuerdo a los valores obtenidos. Usted puede cambiar a esta escala accionando el botón .

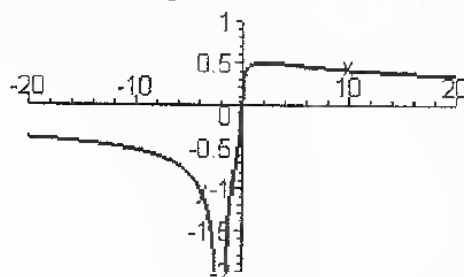
Para obtener gráficos de calidad, en los que se puedan apreciar los detalles, es muy importante tener en cuenta los rangos de variación tanto de la variable independiente como de la dependiente. Observe, además, que las funciones pueden ser introducidos directamente en el comando o ser definidas previamente.

```
> plot(surd(x/(x+2)^2,3),x,color=black);
```



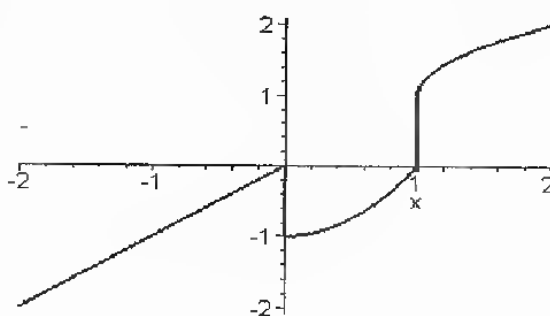
Lo poco que se puede observar del gráfico anterior es que, aparentemente, $y = 0$ es una asíntota al gráfico de la función. Modifiquemos el rango de las variables independiente y dependiente:

```
> plot(surd(x/(x+2)^2,3),x=-20..20,y=-2..1,color=black);
```



En forma idéntica se grafica una función a trozos. Ilustraremos con la función h definida previamente; el interés se centra alrededor del cero:

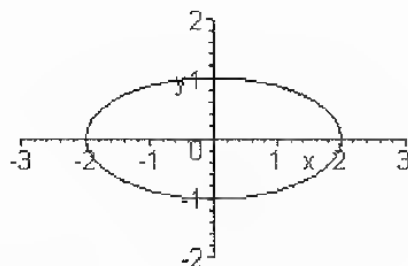
```
> plot(h(x),x=-2..2);
```



C.3:8 Curvas paramétricas

Veamos cómo graficar una curva dada por las ecuaciones paramétricas $x=x(t)$, $y=y(t)$. El ejemplo siguiente es la elipse $x(t)=2\cos t$, $y(t)=\sin t$:

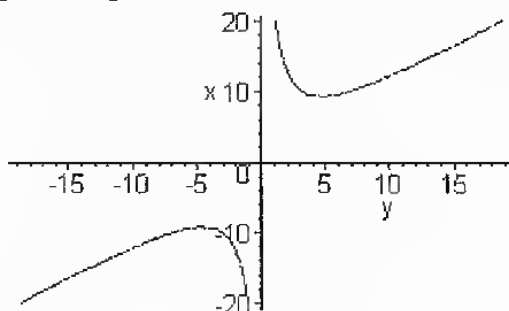
```
> plot([2*cos(t), sin(t), t=0..2*Pi], x=-4..4, y=-2..2, color=black);
```



C.3.9 Funciones definidas implícitamente

Para graficar una curva dada implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$ se *requiere tener cargado el módulo with(plots)*. Se usa el comando `implicitplot` y resulta a veces importante la opción `numpoints`. El ejemplo es con la curva $3xy - 3y^2 = 64$.

```
> with(plots):
> implicitplot(3*x*y-3*y^2=64, y=-20..20, x=-20..20, color=black, numpoints=1000);
```



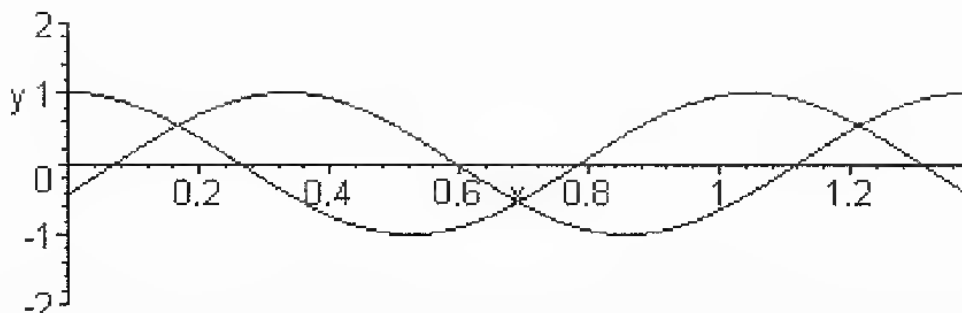
C.3.9 Graficación simultánea de varias funciones. Comando display

Se pueden graficar varias funciones en un mismo sistema de coordenadas. Se utilizan dos formas:

1) Ejemplificamos con $y_1 = \cos 6x$ y $y_2 = \cos(6x - 2)$:

```
> y1:=unapply(cos(6*x), x); y2:=unapply(cos(6*(x-1/3)), x);
    y1 := x → cos(6 x)
    y2 := x → cos(6 x - 2)
```

```
> plot([y1(x), y2(x)], x=0..Pi/3+1/3, y=-2..2, color=[black, blue]);
```



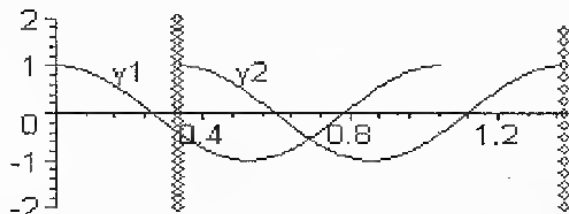
- 2) Otra posibilidad, para lo mismo, es desglosar el comando anterior en una secuencia de comandos; en la cual también se puede incluir el comando `textplot` para colocar etiquetas identificadoras. Para ejecutar la secuencia se usa el comando `display` que requiere tener cargado el módulo `with(plots)`.

Veamos el mismo ejemplo anterior con este comando:

```
> with(plots):
> a1:=plot(y1(x), x=0..Pi/3, y=-2..2, color=black):
> b1:=textplot([0.15, 0.9, `y1`], align=RIGHT):
> a2:=plot(y2(x), x=1/3..Pi/3+1/3, y=-2..2, color=blue):
> b2:=textplot([0.49, 0.9, `y2`], align=RIGHT):
```

Trazamos además las rectas $x = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{3}$ para enfatizar la traslación.

```
> c1:=plot([1/3, t, t=-2..2], x=0..Pi/3+1/3+0.01, color=black, style=point, numpoints=25):
> c2:=plot([1/3+Pi/3, t, t=-2..4], x, color=black, style=point, numpoints=25):
> display(a1, a2, b1, b2, c1, c2, labelfont=[COURIER, bold]);
```



Nota: Para las etiquetas se podría haber escrito un sólo grupo de ejecución con el comando `textplot`.

C.4 Ecuaciones e inecuaciones

C.4.1 Resolución de ecuaciones: Comandos `solve` y `fsolve`

Para resolver ecuaciones o inecuaciones se usan los comandos `solve` y `fsolve`; el primero de ellos da, en los casos que amerite, resultados en forma simbólica, mientras que el segundo da resultados aproximados si las soluciones no son números enteros. Se ejemplifica con la ecuación $-x^2 + 4x + 1 = 0$.

```
> solve(-x^2+4*x+1, x);
```

$$2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}$$

```
> fsolve(-x^2+4*x+1=0, x);
```

$$-0.2360679775, 4.236067977$$

Veamos otro ejemplo con una ecuación de tercer grado: $2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$.

```
> S:=2*x^3-3*x^2+x-1=0;
```

$$S := 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$$

```
> solve(S, {x});
```

$$\left\{ x = \frac{1}{6} (54 + 3\sqrt{321})^{(1/3)} + \frac{\frac{1}{2}}{(54 + 3\sqrt{321})^{(1/3)}} + \frac{1}{2}, \{x = -\frac{1}{12} (54 + 3\sqrt{321})^{(1/3)} - \frac{1}{4} \frac{1}{(54 + 3\sqrt{321})^{(1/3)}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} I \sqrt{3} \left(\frac{1}{6} (54 + 3\sqrt{321})^{(1/3)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(54 + 3\sqrt{321})^{(1/3)}} \right) \right\} \\ , \{x = -\frac{1}{12} (54 + 3\sqrt{321})^{(1/3)} - \frac{1}{4} \frac{1}{(54 + 3\sqrt{321})^{(1/3)}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} I \sqrt{3} \left(\frac{1}{6} (54 + 3\sqrt{321})^{(1/3)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(54 + 3\sqrt{321})^{(1/3)}} \right) \}$$

```
> fsolve(S, {x});
```

$$\{x = 1.398160952\}$$

Maple muestra, con el comando anterior, solamente la solución real.

```
> fsolve(S, {x}, complex);
```

$$\{x = .05091952419 - .5958353978 I\}, \{x = .05091952419 + .5958353978 I\}, \\ \{x = 1.398160952\}$$

Al incluir la opción **complex**, Maple exhibe la solución real y las dos complejas.

Otros comandos muy útiles en el manejo y/o estudio de ecuaciones son:

discrim(P, x):	Cálcula el discriminante del polinomio P en variable x.
lhs(ecua):	Muestra el lado izquierdo de la ecuación ecua.
rhs(ecua):	Muestra el lado derecho de la ecuación ecua.
subs(x=a,ecua):	Sustituye x=a en la ecuación ecua.

C.4.2 Ecuaciones no algebraicas

Para una ecuación donde aparecen funciones trascendentes, no existe teoría que nos diga el número de soluciones, como en el caso de polinomios. Sin embargo, los gráficos y el teorema de los valores intermedios suplen parcialmente esta deficiencia.

Resolveremos la ecuación $x - 2 \ln(x) = 0$.

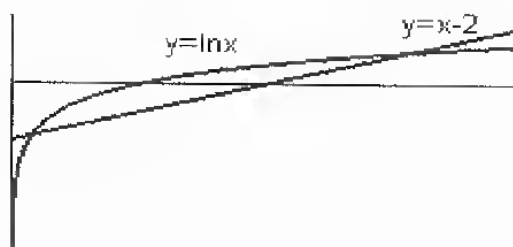
Se reescribe la ecuación en la forma $x - 2 = \ln x$ donde cada miembro es una función elemental fácil de graficar, incluso sin ayuda de Maple. Se grafican éstas:

```
> with(plots):
```

```
> b1:=plot([x-2, ln(x)], x=0..4, color=black, thickness=2):
```

```
> b2:=textplot([3.4, 2.3, `y=x-2`], [1.5, 1.5, `y=lnx`], color=black, thickness=2, tickmarks=[0,0]):
```

```
> display(b1, b2);
```



Observamos que la ecuación tiene dos soluciones:

```
> solve(x-2-ln(x), {x});
```

$$\{x = -\text{LambertW}(-e^{(-2)})\}, \{x = -\text{LambertW}(-1, -e^{(-2)})\}$$

Vemos que con el comando **solve** las soluciones vienen expresadas en forma simbólica y en términos de la función Lambert W (función especial); con el comando **evalf** tenemos una presentación aproximada de las soluciones más comprensible:

```
> evalf(%);
```

$$\{x = .1585943396\}, \{x = 3.146193221\}$$

Veamos qué ocurre al usar el comando **fsolve**:

```
> x1:=fsolve(x-2-ln(x)=0,x);
```

$$x1 := .1585943396$$

Para una ecuación no polinómica que tenga más de una solución **fsolve** presentará sólo una de ellas en forma aproximada, aquí la hemos llamado **x1**. Para calcular otra solución usamos la técnica de dividir por **x-x1**:

```
> x2:=fsolve((x-2-ln(x))/(x-x1)=0,x);
```

$$x2 := 3.146193221$$

Este “truco” no siempre resulta.

C.4.3 Sistemas de ecuaciones lineales

Se definen previamente las tres ecuaciones, sin embargo éstas pueden ser incluidas directamente en el comando:

```
> E1:=3*x-y+z=-1; E2:=x-y-4*z=2; E3:=x-z=0;
```

$$E1 := 3x - y + z = -1$$

$$E2 := x - y - 4z = 2$$

$$E3 := x - z = 0$$

```
> solve({E1,E2,E3});
```

$$\left\{x = \frac{-3}{7}, y = \frac{-5}{7}, z = \frac{-3}{7}\right\}$$

Otro ejemplo:

```
> J1:=2*x+y-z=0; J2:=-x+3*y+z=5; J3:=7*x+7*y-3*z=33;
```

$$J1 := 2x + y - z = 0$$

$$J2 := -x + 3y + z = 5$$

$$J3 := 7x + 7y - 3z = 33$$

```
> solve({J1,J2,J3});
```

Maple no regresa soluciones. ¿Por qué? Calculemos el determinante de la matriz asociada con el sistema, para lo cual se requiere tener cargado el paquete **with(linalg)** (módulo de álgebra lineal):


```
> with(linalg):
> J:=array([ [2,1,-1], [-1,3,1], [7,7,-3] ]);
```

$$J := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> det(J);
```

0

Por lo tanto el sistema no tiene solución o bien tiene infinitas.

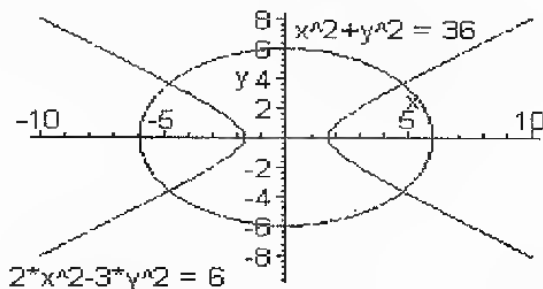
C.4.4 Sistemas no lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

```
> restart; with(plots):
> E1:=x^2+y^2=36; E2:=2*x^2-3*y^2=6;
```

$$E1 := x^2 + y^2 = 36$$

$$E2 := 2x^2 - 3y^2 = 6$$

```
> e1:=implicitplot(E1,x=-10..10,y=-10..10,color=black):
> e2:=implicitplot(E2,x=-10..10,y=-10..10,color=black):
> e3:=textplot([ [4.1,6.4,`E1`], [-4.8,-7.4,`E2`] ]):
> display(e1,e2,e3);
```



Podemos observar que hay cuatro pares ordenados que son solución del sistema.

```
> solve({E1,E2});
```

$$\{y = \text{RootOf}(5_Z^2 - 66), x = \text{RootOf}(5_Z^2 - 114)\}$$

```
> allvalues(%);
```

$$\{y = \frac{1}{5}\sqrt{330}, x = \frac{1}{5}\sqrt{570}\}, \{y = \frac{1}{5}\sqrt{330}, x = -\frac{1}{5}\sqrt{570}\}, \{y = -\frac{1}{5}\sqrt{330}, x = \frac{1}{5}\sqrt{570}\},$$

$$\{y = -\frac{1}{5}\sqrt{330}, x = -\frac{1}{5}\sqrt{570}\}$$

Nota:

Si Maple no presenta una solución, significa que no existe o bien que Maple no ha sido capaz de calcularla.

C.4.5 Desigualdades

```
> solve(-3*x+5>0,x);
```

$$\text{RealRange}\left(-\infty, \text{Open}\left(\frac{5}{3}\right)\right)$$

El comando fue escrito para obtener la respuesta como intervalo. En este sentido, la notación de la respuesta significa:

RealRange : Solución real

Open ($\frac{5}{3}$) : Intervalo abierto de extremo $\frac{5}{3}$.

Con la siguiente escritura se obtiene la respuesta en forma de desigualdad:

> solve(-3*x+5>0, {x});

$$\{x < \frac{5}{3}\}$$

Si no hay lugar a ambigüedad se puede omitir la variable; en este caso Maple presentará la respuesta como intervalo:

> solve(x^2-x-2<=0, {x});

RealRange(-1, 2)

La notación anterior significa intervalo cerrado en -1 y en 2.

> solve(x^2-x-2<=0, {x});

$$\{-1 \leq x, x \leq 2\}$$

Observe que la respuesta satisface dos desigualdades que llevadas a la notación de conjuntos sería la siguiente intersección:

$$[-1, 2] = [-1, \infty) \cap (-\infty, 2]$$

Resolvamos seguidamente la inecuación $1 \leq |x^2 - 2x - 2|$:

> solve(abs(x^2-2*x-2)>=1, x);

RealRange(-infinity, -1), RealRange(3, infinity), RealRange(1-sqrt(2), 1+sqrt(2))

La notación significa la unión de los tres intervalos, es decir:

$$(-\infty, -1] \cup [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}] \cup [3, \infty)$$

Veamos la notación que corresponde a conjuntos:

> solve(abs(x^2-2*x-2)>=1, {x});

$$\{x \leq -1\}, \{3 \leq x\}, \{1 - \sqrt{2} \leq x, x \leq 1 + \sqrt{2}\}$$

Otra inecuación $2 < |-x+3| < 4$:

> solve({abs(-x+3)<4, abs(-x+3)>2}, x);

$$\{x < 7, 5 < x\}, \{-1 < x, x < 1\}$$

C.5 Límites y continuidad

> limit((x^2-1)/(x^3-x^2+2*x-2), x=1);

$$\frac{2}{-3}$$

Si en el comando se cambia **l** (minúscula) por **L** (mayúscula) Maple escribirá el límite, pero si seguidamente usamos el comando **value** obtenemos el valor del límite:

> Limit((1+x)^(1/x), x=0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

> value(%);

e

C.5.1 Límites laterales

En el ejemplo siguiente se define la función previamente, y luego se calculan los límites laterales izquierdo y derecho en $x = a$, respectivamente:

```
> g:=unapply(abs(x-a)/(x-a),x);
```

$$g := x \rightarrow \frac{|x-a|}{x-a}$$

```
> limit(g(x),x=a,left);
```

-1

```
> limit(g(x),x=a,right);
```

1

C.5.2 Cálculo de límites en el infinito

```
> Limit(sqrt(x+1)-sqrt(x),x=infinity)=limit(sqrt(x+1)-sqrt(x),x=infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{-1+x} - \sqrt{x} = 0$$

```
> Limit((1+a/x)^x,x=-infinity)=limit((1+a/x)^x,x=-infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

C.5.3 Continuidad: comandos iscont y discont.

Maple tiene un comando para chequear si una función es continua en el intervalo $[a, b]$.

```
> f:=unapply((x+1)/abs(x+1),x);
```

$$f := x \rightarrow \frac{x+1}{|x+1|}$$

```
> iscont(f(x),x=-infinity..infinity);
```

false

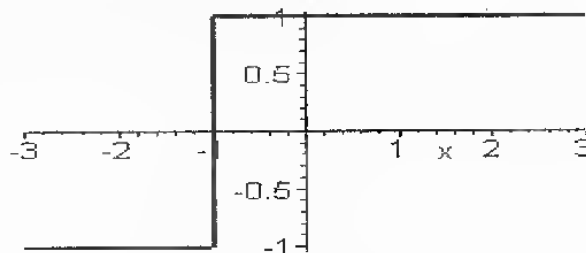
La respuesta significa que la función f no es continua en $(-\infty, \infty)$; la continuidad es una propiedad local, con el comando `discont(f(x),x)` se obtienen los puntos de discontinuidad.

```
> discont(f(x),x);
```

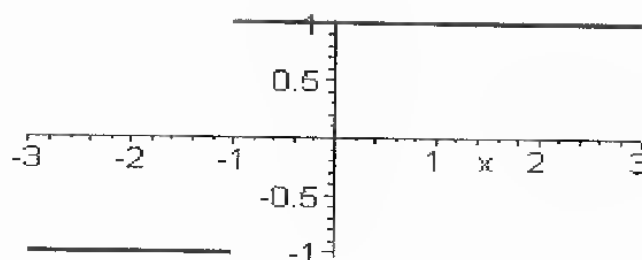
{-1}

Cuando hay un punto de discontinuidad, el comando de graficación `plot` introduce una recta vertical en el gráfico, la cual se puede eliminar con la opción `discont=true`:

```
> plot(f(x),x=-3..3,color=black,thickness=2);
```



```
> plot(f(x),x=-3..3,discont=true,color=black,thickness=2);
```



C.6 Derivadas

C.6.1 Derivada de una función : comando diff

El comando diff deriva, mientras que Diff muestra la notación simbólica de la derivada.

```
> y:=unapply((x^5+x^10)^20,x);
```

$$y := x \rightarrow (x^5 + x^{10})^{20}$$

```
> diff(y(x),x);
```

$$20 (x^5 + x^{10})^{19} (5x^4 + 10x^9)$$

```
> Diff(y(x),x)=diff(y(x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^5 + x^{10})^{20} = 20 (x^5 + x^{10})^{19} (5x^4 + 10x^9)$$

C.6.2 Cálculo de la derivada en un punto

Para evaluar la función derivada en un punto se debe usar el comando unapply para asignar un nombre a la función derivada:

```
> f':=unapply(diff(y(x),x),x);
```

$$f' := x \rightarrow 20 (x^5 + x^{10})^{19} (5x^4 + 10x^9)$$

Evaluamos, por ejemplo, en $x=1$:

```
> f'(1);
```

$$157286400$$

C.6.3 Derivación implícita: comando implicitdiff

Para una curva dada en forma implícita por la ecuación $F(x,y)=0$ se obtiene la derivada $\frac{dy}{dx}$ con el comando implicitdiff. Tenga muy en cuenta el orden en que van escritas en el comando las variables dependiente y e independiente x.

Ejemplificamos con la curva definida por $x^3 + x^2y + y^2 = c$. En 1) y es función de x : $y=y(x)$; x es la variable independiente y la variable dependiente. En 2) x es función de y : $x=x(y)$; y es la variable independiente x la variable dependiente.

1)

```
> implicitdiff(x^3+x^2*y+y^2=c,y,x);
```

$$-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$$

2)

```
> implicitdiff(x^3+x^2*y+y^2=c,x,y);
```

$$-\frac{x^2+2y}{x(3x+2y)}$$

C.6.4 Cálculo de la derivada en un punto de una curva

Para calcular la derivada en un punto de una curva descrita en forma implícita, se debe usar el comando `unapply` para asignar un nombre a la función derivada, que en este caso es una función en dos variables: la dependiente y la independiente. Veamos cómo:

```
> implicitdiff(y^2+x^2/4=1,y,x);
```

$$-\frac{1}{4} \frac{x}{y}$$

```
> g:=unapply(%,x,y);
```

$$g := (x, y) \rightarrow -\frac{1}{4} \frac{x}{y}$$

```
> g(1, -sqrt(3)/2);
```

$$\frac{1}{6} \sqrt{3}$$

El resultado anterior es la derivada $\frac{dy}{dx}(1)$; pendiente de la recta tangente al gráfico de la curva en el punto $\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C.6.5 Derivadas de orden superior

Orden 2:

```
> diff(x^5,x$2);
```

$$20x^3$$

o bien

```
> diff(x^5,x,x);
```

$$20x^3$$

Orden 3: (También aquí `Diff` es un commando de notación y `diff` es un comando de cálculo).

```
> Diff(f(x),x$3)=diff(a^x,x$3);
```

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x) = a^x \ln(a)^3$$

Como siempre, para evaluar la derivada en un punto debe ser definirla como función:

```
> k:=unapply(diff(a^x,x$3),x);
```

$$k := x \rightarrow a^x \ln(a)^3$$

```
> k(0);
```

$$\ln(a)^3$$

También se puede obtener la derivada de orden n de una función dada implícitamente por $F(x,y)=0$, con el comando `implicitdiff`.

```
> implicitdiff(x*y=c,y,x$2);
```

$$2 \frac{y}{x^2}$$

C.6.6 Desarrollo de Taylor : comando `taylor`

```
> taylor(exp(x),x=0,5);
```

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^5)$$

El número de términos del desarrollo viene dado por el último elemento del `commando`. En el ejemplo anterior es 5.

Para establecer alguna comparación numérica o gráfica se debe transformar la serie de Taylor en un polinomio usando el comando `convert`:

```
> Polinomio:=convert(%,polynom);
```

$$\text{Polinomio} := 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

Para $x=1$ se obtiene el valor aproximado de la constante e :

```
> e:=evalf(subs(x=1,%),6);
```

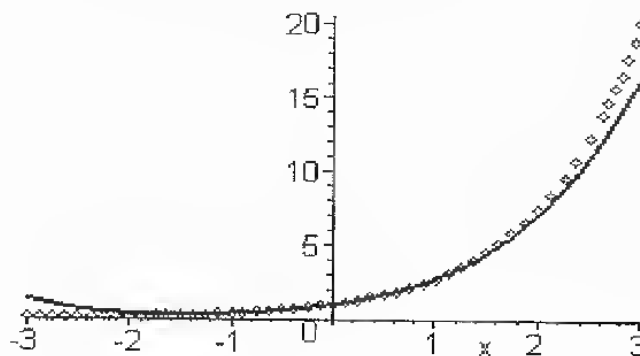
$$e := 2.70833$$

```
> with(plots):
```

```
> a:=plot(exp(x),x=-3..3,color=black,style=point);
```

```
> b:=plot(Polinomio,x=-3..3,color=black,thickness=2);
```

```
> display(a,b);
```





IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

Onda sinusoidal

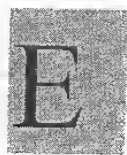
$$y = a \operatorname{sen}(\omega x) + b \cos(\omega x) = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi) \quad \text{con} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

Teorema del coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Teorema de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



FÓRMULAS EN GEOMETRÍA

Trapezio

$$A = \frac{1}{2}(b + a)h$$

Sector circular

$$A = \frac{\theta}{2}r^2$$

$$L = \theta r$$

Esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$A = 4\pi r^2$$

Cono circular recto

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$A = \pi R \sqrt{R^2 + h^2} \quad \text{lateral}$$

Círculo

$$A = \pi r^2$$

$$L = 2\pi r$$

Elipse

$$A = \pi ab$$

$$L \approx \pi \left[1,5(a + b) - \sqrt{ab} \right]$$

Cilindro

$$V = \pi r^2 h$$

$$A = 2\pi rh \quad \text{lateral}$$

Tronco de cono circular recto

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$A = \pi (R + r) \sqrt{h^2 + (R - r)^2} \quad \text{lateral}$$



ÁLGEBRA

Potencias y raíces

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad ; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad ; \quad (ab)^n = a^n b^n \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad ; \quad (a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ; \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad ; \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad ; \quad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad ; \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a}$$

Determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (Método de Cramer)

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad x = \frac{D_x}{D} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D} \quad ; \quad z = \frac{D_z}{D}, \text{ siempre que } D \neq 0.$$

Donde:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{con} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Los coeficientes $\binom{n}{k}$ también, se pueden determinar usando el triángulo de Pascal:

Potencia		Coeficientes
0	:	1
1	:	1 1
2	:	1 2 1
3	:	1 3 3 1
4	:	1 4 6 4 1
5	:	1 5 10 10 5 1
6	:	1 6 15 20 15 6 1

.....

Progresiones aritmética y geométrica

Aritmética:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ donde $a_n = a_1 + (n-1)r$ y r es la diferencia de dos términos consecutivos ($r = a_2 - a_1$).

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \text{ suma de los } n \text{ primeros términos.}$$

Geométrica:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ donde $a_n = a_1 r^{n-1}$ y r es la razón de la progresión.

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ suma de los } n \text{ primeros términos.}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Apostol, T. M. Análisis Matemático. Editorial Reverté, S. A., Barcelona (1974).
- [2] Bell, E. T. Los grandes matemáticos, desde Zenón a Poincaré; su vida y sus obras. Editorial Lozada. (1948).
- [3] Bourbaki, Nicolás. Elementos de historia de las matemáticas. Alianza Universidad. Madrid (1976)
- [4] Bronshtein y Semendiaev Manual de Matemática para ingenieros y estudiantes. Editorial Mir. Moscú (1982).
- [5] Cristofolini, Paolo. Los hombres de la historia, Descartes. Centro Editor de América Latina. Buenos Aires(1969).
- [6] Cruz, Cipriano. Funciones Logarítmicas y exponenciales. Universidad Central de Venezuela. Caracas (1983).
- [7] Demidovich, B. y otros. Problemas y ejercicios de análisis matemático. Paraninfo. Madrid (1975).
- [8] Devinatz, Allen. Advanced Calculus. Holt Rinehart Winston. USA.
- [9] Guerreiro, Carlos. Límites y continuidad. Universidad Central de Venezuela. Caracas (1983).
- [10] Guerreiro, C. y Cruz, C. Cónicas. Universidad Central de Venezuela. Caracas (1983).
- [11] Guerreiro, Carlos. Introducción al Maple. Aplicaciones docentes. Universidad Central de Venezuela. Caracas (1998).
- [12] Hogben, Lancelot. El maravilloso mundo de las matemáticas. Aguilar. Madrid (1972).
- [13] Hernández, A. ; Serpa, M. ; Ibañez, M.T. y Suárez L.M. Análisis Matemático I. Guía de ejercicios. Universidad Central de Venezuela. Caracas (1991).
- [14] Larson, Roland y Hostetler, Robert. Cálculo y Geometría Analítica. McGraw-Hill. Bogotá (1992).
- [15] Lehmann, Charles. Geometría Analítica. Limusa. México(1980).
- [16] Lick, Don R. The Advanced Calculus of one Variable. Appleton-Century-Crofts. New York(1971).
- [17] Pasquinelli, Roberto. Los hombres de la historia, Laplace. Centro Editor de América Latina. Buenos Aires(1969).
- [18] Pastor, Rey y Babini J. Historia de las matemáticas. Espasa-Calpe. Buenos Aires (1952).
- [19] Piskunov, N. Cálculo diferencial e integral, V-1. Editorial Mir. Moscú (1977).
- [20] Preti, Giulio. Los hombres de la historia, Newton. Centro Editor de América Latina. Buenos Aires(1969).
- [21] Purcell, Edwin y Varberg, Dale. Cálculo con Geometría Analítica. Prentice Hall. México (6ª edición).
- [22] Resnick, Robert y Halliday, David. Física, V-1. CECSA. México(1972)
- [23] Ribnikov, K. Historia de las matemáticas. Editorial mir. Moscú(1987).
- [24] Rossi, Paolo. Los hombres de la historia, Galileo. Centro Editor de América Latina. Buenos Aires(1969).
- [25] Spivak, Michael. Cálculo infinitesimal, V-1,2. Editorial Reverté S. A. Barcelona (1972).
- [26] Stein, Sherman y Barcellos Anthony. Cálculo y Geometría Analítica, V-1. McGraw-Hill. Bogotá(1994).
- [27] Stewart, James. Cálculo. Grupo Editorial Iberoamérica.- México (2ª edición).
- [28] Thomas y Finney. Cálculo con Geometría Analítica, V-1. Addison - Wesley Iberoamericana, México

- [29] Vera, Francisco. Las matemáticas de los Musulmanes Españoles . Editorial Nova. Buenos Aires(1947).
- [30] Zill, Dennis. Calculus with Analitic Geometry. Prindle,Weber & Schmidt. Boston .
- [31] Selecciones de Scientific American. Matemáticas en el mundo moderno. Editorial Blume. Madrid(1974).
- [32] Historia de la Humanidad V-6. Bajo el patrocinio de la Unesco. Planeta/Sudameris.Barcelona(1981).

Í N D I C E

A

abscisa de un punto, 21
 aceleración, 121
 álgebra de funciones, 39
 aproximación lineal, 148
 área de un triángulo, 26
 asíntotas:
 al gráfico de una función, 144
 de la hipérbola, 188, 191

B

baricentro, 31
 Bernoulli Johann, 139
 braquistocrona, 139

C

cambio de base de la función logaritmo, 66
 cambios relacionados, 164
 Cauchy Agustín, 141
 centro de gravedad del triángulo, 31
 cicloide, 67, 139
 circuncentro, 29
 circunferencia:
 centro, 27
 circunscrita en un triángulo, 30
 ecuación de la, 27
 inscrita en un triángulo, 30
 concavidad, 142
 continuidad, 93, 107
 convergencia de una sucesión, 93
 coordenadas cartesianas, 21
 Copérnico Nicolás, 82
 criterios:
 de la primera derivada, 142, 154
 de la segunda derivada, 143, 155
 cuadrantes, 21

D

De L'Hôpital Guillaume F. A., 141
 derivación implícita, 120, 127
 logarítmica, 128
 paramétrica, 121, 129
 derivada(s):
 álgebra de, 119, 125
 definición, 117, 122
 de la función compuesta, 119, 126
 de la función inversa, 120, 128
 de orden superior, 120, 130
 interpretación física de la, 118, 121, 150
 geométrica de la, 117, 148,

laterales, 118, 124
 tabla de, 122

Descartes, René, 2, 19, 186

desigualdad(es)
 triangular, 4
 propiedades, 3

diferenciales, 146, 171

discontinuidad, 94, 107

distancia:
 de un punto a una recta, 25
 en el plano, 21
 entre dos puntos de la recta real, 3
 entre dos rectas, 26

dominio:
 de la composición, 41, 62
 de una función, 39

E

ecuación(es):
 de las bisectrices, 26
 general de 2º grado, 192, 196
 paramétricas de una curva, 46, 67
 ejes de coordenadas, 21
 elipse, 173, 187
 errores, 147
 excentricidad, 189

F

función(es):
 álgebra de, 39
 composición de, 41, 61
 creciente, 41
 decreciente, 41
 definición de, 39
 dominio de una, 39, 54
 exponencial, 43, 48
 hiperbólicas, 44, 51
 inversas, 52
 igualdad de, 39
 impar, 40, 55
 implícita, 45
 inyectiva, 42
 inversa, 42, 64
 lineal, 47
 logaritmo, 44, 48
 par, 40, 55
 paramétricas, 46, 67
 periódica, 40, 56
 potencia, 47, 48
 trigonómicas, 49, 50
 trigonómicas inversas, 50

valor absoluto, 47

G

Galileo Galilei, 82, 175
geometría analítica, 21
gráfico de una función, 39

H

hipérbola, 173, 191
Huygens Christian, 83

I

identidades hiperbólicas, 44
identidades trigonométricas, 214
incentro, 30
indeterminaciones, 93
inecuación, 3
intervalos, 3

K

Kepler Johannes, 82, 185
Kronecker Leopold, 1

L

Lagrange, Joseph-Louis, 140
Lambert J. H., 1
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 39, 85
ley de refracción, 168
leyes de Kepler, 82
leyes de Newton, 84
L'Hôpital Guillaume F. A., 141
límite(s):
 álgebra de, 90
 definición de, 90, 95
 de una sucesión, 92
 en el infinito, 92, 102
 idea geométrica de, 88
 infinitos, 92, 106
 laterales, 91, 99
 notables, 91, 93, 99, 103
lugar geométrico, 186

M

Maple, 213
método de bisección, 95, 110
método de Newton, 143, 162

N

Newton Isaac, 84
números irracionales, 1
números racionales, 1
número crítico, 140

O

onda senoidal, 58, 214
optimización, 146, 165
ortocentro, 30

P

parábola, 149, 186, 190
pendiente de una recta, 23
período, 41
punto:
 de inflexión, 142
 medio (coordenadas), 22

propiedades:

 algebraicas de la exponencial, 43
 del logaritmo, 44
 de límites infinitos, 93
 del valor absoluto, 4
 reflectora de la elipse, 174
 hipérbola, 174
 parábola, 149

R

rango de una función, 39
recta(s):
 ángulo de inclinación de una, 23
 ángulo entre dos, 25
 condición de paralelismo, 23
 condición de perpendicularidad, 24
 ecuaciones de la, 23
 pendiente, 23
 tangente al gráfico de una función, 118, 148
reflexiones, 45, 58
regla de la cadena, 119, 126
regla de L'Hôpital, 141, 152
Rolle Michell, 140
rotación de ejes, 193, 196

S

secciones cónicas, 185
simetrías del gráfico de una función, 40
sucesión (definición), 40

T

teorema:
 del coseno, 214
 de los senos, 214
 de los valores intermedios, 94, 109
 de los valores extremos, 94
 del Sandwich, 91
 del Valor Medio, 140, 151
 del Valor Medio Generalizado, 141
 de Rolle, 140, 151
traslación de ejes, 190
traslaciones, 45, 58
trazado de curvas, 145, 157
triángulos (ejercicios sobre), 29

V

valor absoluto:

definición, 4

desigualdad triangular, 4

propiedades del, 4

valores aproximados, 147

valores extremos, 140

valor máximo, 139

valor mínimo, 139

variables dependiente , independiente, 39

velocidad, 118